



Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Económicas
Biblioteca "Alfredo L. Palacios"



Tratamiento del riesgo en proyectos de inversión

Taccioli, Antonio Eduardo

1973

Cita APA: Taccioli, A. (1973). Tratamiento del riesgo en proyectos de inversión. Buenos Aires: Universidad de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Económicas

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales de la Biblioteca Central "Alfredo L. Palacios". Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

Fuente: Biblioteca Digital de la Facultad de Ciencias Económicas - Universidad de Buenos Aires

CP 1501
1023

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Económicas

- TRATAMIENTO DEL RIESGO EN PROYECTOS DE INVERSION -

Tesis presentada para optar al título de
Doctor en Ciencias Económicas

Autor: ANTONIO EDUARDO TACCIOLI

Nº de Registro: 11.789

PLAN "D"

Abril de 1973

TESIS

PREFACIO

El objeto de este trabajo es considerar los diversos métodos de decisión para el tratamiento del riesgo en proyectos de inversión.

Los modelos tradicionales para la elección de proyectos suponen impropriamente que los flujos de fondos se conocen con certeza, siendo el mundo real cambiante e incierto.

Sin embargo los inversores tampoco son totalmente ignorantes de los valores que pueden asumir las variables involucradas y están en condiciones de formular estimaciones y asignarles probabilidad subjetivas.

No obstante el amplio desarrollo teórico del tema, sus dificultades prácticas de medición, relativizan su aplicación.

Los métodos prácticos: pronósticos conservadores, tasas de descuento ajustadas por riesgo, período de devolución y equivalentes de certeza, sencillos de aplicar fallan al desechar información, ser altamente subjetivos y considerar valores únicos.

El valor monetario esperado de los resultados posibles, señalan la tendencia central sin establecer su dispersión.

La teoría de la utilidad reemplaza los resultados monetarios por la utilidad asignada por el inversor conforme su curva de preferencia. Es inadecuada cuando debe igualarse en el tiempo el flujo de fondos.

La teoría del portafolio trata de establecer el conjunto de inversiones cuya relación retorno-riesgo resulte óptima al inversor. Inicialmente referido a inversiones mobiliarias, se busca su aplicación a proyectos de inversión. La formulación del modelo no ha logrado trascender del ámbito de las inversiones mobiliarias en mercados financieros de economía desarrollada. Presenta engorrosos problemas de medición.

Para su aplicación a proyectos de inversión, debe necesariamente utilizarse la simulación.

El árbol de decisión es especialmente aplicable a decisiones secuenciales. Eficiente para identificar alternativas, facilitar la evaluación de los cursos alternativos de acción, su mayor obstáculo es que los valores terminales aumentan en progresión geométrica de las alternativas y puntos de decisión.

El método de simulación introduce la distribución de probabilidades de los valores posibles de las variables fundamentales para cuya elección es útil el análisis de sensibilidad. Se simulan las condiciones del mundo real computando un conjunto de resultados con sus probabilidades que conforman el perfil de riesgo del proyecto.

La simulación es considerada el método técnicamente más adecuado para analizar en profundidad los retornos y riesgos del proyecto, limitando su aplicación el costo resultante. En proyectos de importancia relativa sería suficiente utilizar el valor monetario esperado a través de un árbol de decisión.

Se analizan especialmente la dependencia de los flujos de fondos y sus correlaciones, la utilización del método bayesiano para decidir la conveniencia de obtener mayor información, las ventajas de considerar el abandono anticipado de una inversión y los cambios del riesgo y de la estructura de endeudamiento de la empresa.

Se tratan también las inversiones riesgosas en nuevos productos y la resolución de su incertidumbre así como las inversiones en equipos automáticos y su rápida obsolescencia y el impacto de la inflación sobre los flujos de fondos, juntamente con la erosión sobre la posición neta de activos y pasivos monetarios.

Como apéndice se incorpora una encuesta efectuada sobre la aplicación de métodos de evaluación de inversiones en nuestro contexto.

I N D I C E

Pág.

PARTE I - IntroducciónCapítulo 1 - Introducción

1.1	Elección de proyectos de inversión	2
1.2	Certeza, riesgo e incertidumbre	4
1.3	Análisis del riesgo	7
	Referencias bibliográficas Capítulos 1 y 2	16

PARTE II - Métodos de DecisiónCapítulo 2 - Métodos Prácticos

2.1	Pronósticos conservadores	17
2.2	Tasa de descuento ajustada por riesgo ...	18
2.3	Período de devolución	23
2.4	Comparación entre tasa de retorno exigida y cálculo de equivalentes en certeza	25

Capítulo 3 -

3.1	Equivalentes de certeza	28
3.2	Valor monetario esperado	33
3.3	Análisis de probabilidades	42
3.4	Desviación estandar y varianza	51
3.5.1	Semivarianza	55
3.5.2	Media geométrica	59
3.6.1	Coefficientes de variación	62
3.6.2	Restricción de las variaciones	65
3.6.3	Riesgo y tamaño de la firma	70
	Referencias bibliográficas capítulo 3	72

Capítulo 4 - Flujo futuro de fondos

4.1	Independencia de los flujos de fondos ...	73
4.2	Correlación y covarianza	75
4.3	Flujo de fondos dependientes	82
4.4	Combinación de mutua independencia y perfecta correlación - Modelo de Hillier.	90
4.5	Correlaciones moderadas -Uso de probabilidades condicionales	98
	Referencias bibliográficas Capítulo 4	101

	pág.
<u>Capítulo 5 - Uso del Método Bayesiano para la Obtención de información adicional</u> ...	102
Referencias bibliográficas Capítulo 5	125
 <u>Capítulo 6 - Árboles de Decisión</u>	
6.1 Secuencia de decisiones y árbol de decisión	126
6.2 Diagrama de decisión	132
6.3 Evaluación de estrategias completas	148
6.4 Arbol de decisión aleatorio	150
Referencias bibliográficas Capítulo 6	157
 <u>Capítulo 7 - Consideración de múltiples variables- Simulación</u>	
7.1 Variables múltiples y simulación	158
7.2 Construcción del modelo	173
7.3 Desarrollo de casos prácticos de evaluación de proyectos	180
7.4 Análisis del riesgo	202
Referencias bibliográficas Capítulo 7	208
 <u>Capítulo 8 - Teoría de la Utilidad</u>	
8.1 Concepto de utilidad	209
8.2 Valor monetario esperado y utilidad esperada	215
8.3 Aversión al riesgo	219
8.4 Función de utilidad	224
8.5 Supuestos necesarios para describir las preferencias.	226
8.6 Estudios experimentales para determinar funciones de utilidad	234
8.7 Determinación de una función de utilidad	237
8.8 La ilusión Cero	242
8.9 Utilización de las curvas de utilidad - Alcances	243
Referencias bibliográficas, Capítulo 8	250
 <u>Capítulo 9 - Inversiones Riesgosas</u>	
9.1 Inversiones en nuevos productos y resolución de la incertidumbre	252
9.2 Inversiones en equipos especiales altamente automáticos	264
Referencias bibliográficas, Capítulo 9	269

Capítulo 10 - Teoría del Portafolio

10.1	Introducción	270
10.2	Modelo de Markowitz	278
10.3	Modelos de Sharpe	299
10.3.1	Método diagonal	299
10.3.2	El modelo lineal	305
10.3.3	El portafolio del prestamista y del tomador de dinero	307
10.4	Límite de confianza de BAumol	310
10.5	Comprobaciones empíricas	
10.5.1	Comparación de la eficiencia de modelos de portafolio de un índice único	315
10.5.2	Comparación entre portafolios reales y óptimos	319
10.5.3	Línea característica de Treynor	323
10.6	Crítica a las medidas de dispersión usadas	330
10.7	Aplicación a presupuestos de capital ...	337
10.8	Selección del Portafolio final	351
	Referencias bibliográficas, Capítulo 10	355

Capítulo 11 - Incertidumbre total y teoría de los juegos

11.1	Decisiones en el supuesto de incertidumbre	357
11.2	Teoría de los juegos	365
	Referencias bibliográficas, Capítulos 11 y 12..	371

Capítulo 12 - Probabilidades de indiferencia 372Capítulo 13 - Tratamiento de la inflación como un riesgo

13.1	La inflación y los proyectos de inversión	378
13.2	Enfoque clásico para considerar la infla- ción	384
13.3	Enfoque residual para considerar la in- flación	390
	Referencias bibliográficas, Capítulo 13	398

Capítulo 14 - Valor residual y decisión de abandono 399

	Referencias bibliográficas, Capítulo 14	413
--	---	-----

Capítulo 15 - Cambios en los riesgos de la firma y costo
de capital 414

	Referencias bibliográficas, Capítulo 15	424
--	---	-----

PARTE III - Conclusión

Capítulo 16 - Resumen y tesis	426
-------------------------------------	-----

16.1	Métodos Prácticos	427
16.2	Medidas de correlación y dispersiones .	431
16.3	Método bayesiano para la obtención de información adicional	423
16.4	Arbol de decisión	435
16.5	Simulación	438
16.6	Teoría de la utilidad	440
16.7	Teoría del Portafolio	442
16.8	Incertidumbre total	445
16.9	La inflación en los proyectos de inver- sión	447
16.10	Inversiones riesgosas y decisión de abandono	449
16.11	Riesgo de la firma y costo de capital..	451
16.12	Tesis	452
APENDICE Encuesta sobre criterios y métodos de evalua- ción de inversión en Argentina.....	459
NOMENCLATURA	466
BIBLIOGRAFIA	469

PARTE I

INTRODUCCION

INTRODUCCION

Capítulo 1

1.1. Elección de proyectos de inversión.

Si bien resulta relativamente fácil definir el valor de los objetos en tanto y cuanto son escasos y proveen utilidad, determinar su valor es más difícil. En las transacciones de compra-venta, el objeto en venta tiene un precio ofrecido tal, mayor que el valor que el vendedor le asigna y por ello el vendedor lo vende; y para el comprador el precio que ofrece es menor que el valor por él asignado.

Para muchos economistas el valor de un bien es el valor actual de los flujos futuros de utilidades a producir por dicho bien. Para ello se hace el supuesto que tales eventos futuros son conocidos con certeza.

En el mundo real es difícil verificar un estado de certeza para el futuro. Ciertos eventos son menos inciertos que otros. En general puede afirmarse que un bien será menos valioso a medida que aumenta la incertidumbre asociada con el flujo futuro de sus resultados (8).

Es bien conocido que en la vida humana hay elementos incluidos de incertidumbre y son las decisiones más significativas las que tienen resultados que tienden a ser inciertos. Sin embargo la teoría clásica de toma de decisiones basada en el utilitarismo económico del siglo XIX presupone el conocimiento del resultado de la decisión.

En el siglo XX ello fue limitado al conocimiento de las probabilidades de los resultados posibles de la decisión, siguiendo la línea general de tendencia de sustituir certeza por probabilidad.

Masse afirma que se ha tenido que reconocer el carácter fundamental de la incertidumbre después de haber aceptado durante mucho tiempo el dominio del determinismo.

Según Keynes el hecho más importante en la materia es lo precario de los datos con ayuda de los cuales nos vemos obligados a efectuar nuestras evaluaciones de los rendimientos descontados. (26)

Para Farrar la teoría de capital ha puesto en evidencia la impropiedad de las teorías o modelos que ignoran el rol de la incertidumbre en las decisiones de inversión (10).

En el estudio de elección de proyectos se asume el supuesto de considerar que toda inversión es hecha en condiciones de certeza, aún cuando es ampliamente conocido que en general no hay inversiones en las que se conozca con certeza lo que se recibirá en el futuro.

Se supone que el Valor Actual Neto de una inversión no es una variable sino una cantidad determinada y como resultado de ello puede afirmarse inequívocamente que una inversión es aceptada si su VAN es mayor que cero. Sin embargo, el mundo en que vivimos es cambiante e incierto.

La debilidad intrínseca de los enfoques habitualmente empleados no tiene, por lo tanto, nada que ver con los procedimientos matemáticos utilizados para calcular la tasa de rendimiento. Estos cálculos han alcanzado un grado de precisión que, si a algo conduce, es a engañarnos; puesto que cualquiera sea la formulación matemática, lo cierto es que cada una de las variables utilizadas para el cálculo está sujeta a una sensible incertidumbre.

La única certeza que podemos alcanzar es la de que no es posible eliminar la incertidumbre (.72)

Si la inversión es en esencia un sacrificio presente para obtener futuros beneficios, el presente es relativamente bien conocido, mientras que el futuro representa un sacrificio cierto por ingresos inciertos.

Cada una de las suposiciones que se resuelva aceptar respecto del futuro, presenta cierto grado de incertidumbre; y la acumulación de todas las incertidumbres parciales puede llegar a asumir proporciones críticas o de total falta de certeza. Es decir que existe un riesgo, el cual es preci-

so evaluar; pero las técnicas de análisis habitualmente utilizadas prestan muy poca ayuda en tal sentido (17).

La comunidad empresaria solo puede tomar decisiones de políticas futuras a la luz del contexto económico y social en el cual se encuentra. Cuanto más se infiltra la acción de gobierno dentro de esta estructura y cuando mayores son los cambios frecuentes en la dirección y el énfasis de la economía nacional, tanto mayor es el peso del riesgo al momento de planear inversiones. Las crisis económicas tienen como resultado en muchos países cambios masivos de la política económica y fiscal. Si los gobiernos desean que la actividad económica privada opere con máxima eficiencia y tome decisiones racionales que afectan sus actividades futuras, utilizando técnicas modernas para cuantificar las diversas variables involucradas en cada decisión, deben crear un contexto socio-económico en el cual la incertidumbre esté reducida al mínimo. A menos que se tomen providencias en esas líneas, se puede pronosticar que la incertidumbre por si sola puede detener el crecimiento económico; si bien son inevitables los riesgos que en toda decisión representan la competencia y los cambios tecnológicos, debemos redoblar esfuerzos para reducir los riesgos en donde resulte factible hacerlo.

Existe también el peligro de evitar riesgos. Las inversiones típicamente más riesgosas son aquellas referidas a nuevos productos e investigación y desarrollo, pero estas actividades son inversiones esenciales si el empresario desea sobrevivir y crecer. Si no se generan nuevas ideas o nuevos productos es muy probable verse superado por el espíritu competitivo de sus rivales en contraste con el propio estancamiento. Evitando los riesgos de tales inversiones se somete a la empresa a un riesgo potencialmente mayor, que los competidores la superen en "know-how" técnico y de marketing y se vaya transformando en una empresa no competitiva y pasada de moda (55).

1.2. Certeza, riesgo e incertidumbre

Existe certeza cuando cada acción conduce invariablemente a un resultado específico conocido. Bajo certeza cada acción implica un resultado y en

consecuencia es suficiente establecer un criterio para ordenar resultados.

Existe incertidumbre cuando un proceso puede conducir a más de un resultado.

Virtualmente todas las decisiones empresarias se efectúan en condiciones de incertidumbre. Se debe elegir entre un curso definido de acción entre todos los posibles, aún cuando sus consecuencias dependen de eventos que no pueden ser pronosticados con certeza.

Incertidumbre implica la falta de certeza de los flujos de fondos, lo que no implica que el empresario se encuentra inhabilitado para establecer las expectativas de los valores de las variables pero, normalmente, estos valores no son valores únicos.

La mayoría de los empresarios que tienen que tomar decisiones intuyen en cierta medida la posibilidad de ocurrencia de determinados sucesos en el futuro. Si bien no tienen certeza absoluta no son completamente ignorantes de lo que puede ocurrir. (13)

Alchian citado por Byrne define la incertidumbre cuando una acción particular es posible que sea considerada en términos de más de un posible ingreso. Existe pues, incertidumbre cuando hay múltiples acciones alternativas, cada una de las cuales puede ser considerada en términos de más de un posible ingreso (6).

Como el futuro no puede ser pronosticado con seguridad, el empresario se ve obligado a efectuar conjeturas sobre ese futuro incierto.

La gran mayoría de los autores emplean en forma indistinta los términos riesgo e incertidumbre. Sin embargo puede establecerse una diferenciación entre ambos vocablos.

Riesgo se refiere a una situación en la que los posibles resultados futuros de una decisión presente, si bien son varios, se conoce por adelantado la probabilidad de ocurrencia de cada uno de ellos. En incertidumbre la dimensión o la probabilidad de ocurrencia de los posibles resultados futuros no puede ser objetivamente establecida por adelantado.

Una situación de riesgo es una póliza de seguro de vida por cinco años. En dicho término pueden ocurrir unicamente dos eventos: 1) que el asegurado sobreviva al cabo de cinco años y, 2) que el asegurado fallezca dentro del término de vigencia de la póliza. Las probabilidades objetivas de ocurrencia de estos dos eventos se encuentran en las tablas de mortalidad (35).

No son comunes los casos en que se conocen con total exactitud las probabilidades objetivas de los posibles eventos. En la mayoría de los casos es inexistente o insuficiente una base de cálculo para tales cálculos objetivos y se debe recurrir a determinados métodos alternativos para predecir las posibilidades de distintos ingresos. Se utilizan así métodos científicos de muestreo.

En un estado de incertidumbre no son conocidos ni los posibles eventos ni las respectivas probabilidades de ocurrencia y lo que se trata es trasladar la incertidumbre a una situación de riesgo estableciendo probabilidades subjetivas a cada evento posible. O sea se convierten subjetivamente en una distribución estimada, todas las opiniones, pronósticos, experiencias y entendimiento de los posibles eventos.

En muchas inversiones la predicción depende de un gran número de variables interrelacionadas y a menudo desconocidas. Cuando las predicciones deben basarse total o parcialmente en el criterio del que las juzga más que en los resultados del manipuleo de datos del pasado se denominan estimaciones subjetivas de probabilidades correlacionadas.

La incertidumbre de las consecuencias es básicamente la que existe en la mente del tomador de decisiones, por lo tanto su evaluación es subjetiva (39).

En la práctica la distinción entre riesgo e incertidumbre se torna académica por cuanto no existen técnicas generalmente aceptadas para el tratamiento explícito de la incertidumbre (1).

El empresario en mayor o menor grado estima las posibilidades de diferentes resultados usando técnicas de probabilidades objetivas o subjetivas, y actúa como si ellas fueran correctas.

Dice Schmidt que las probabilidades son el lenguaje de la incertidumbre (45).

1.3. Análisis del riesgo

El análisis del riesgo no es una técnica para reemplazar el razonamiento experto. Por el contrario, requiere su uso en mayor escala que en los análisis tradicionales. La técnica no puede dar respuestas correctas sobre la base de supuestos falsos.

El objetivo de la teoría de inversión bajo riesgo es evaluar medios alternativos de expresión y seleccionar los medios que tengan la máxima consistencia.

Es un tema con grandes dificultades prácticas de medición que muestra un desarrollo teórico amplio, pero distante de su aplicación práctica (27).

En la Parte II se tratan los métodos de decisión en proyectos de inversión bajo condiciones de riesgo o de incertidumbre.

El capítulo 2 considera los métodos prácticos para el tratamiento del riesgo. Se analiza la aplicación de pronósticos conservadores, que tienden a reducir el nivel de riesgo a límites aceptables aún por individuos con aversión al riesgo, con la contrapartida de desechar inversiones por exceso de precaución.

Con el uso de la tasa de descuento ajustada por riesgo, se hace variar el tipo de la tasa de descuento en función del riesgo involucrado. Los riesgos se encasillan en categorías a cada una de las cuales se le asigna una tasa de descuento que considera la actitud del inversor frente al riesgo. A mayor riesgo, por aplicación de una tasa mayor, se obtienen valores actuales reducidos. Si la rentabilidad del proyecto más riesgoso supera esa detracción, será aceptado sobre otros más seguros. Ello involucra un alto grado de subjetividad por la asignación que debe hacerse, ya sea directamente de la tasa de descuento o por la inclusión en determinada categoría de riesgo.

En el método del período de devolución, se considera únicamente el período de tiempo requerido para recuperar la inversión original por medio de los ingresos futuros, siendo preferibles aquellos proyectos con menor período de recuperación. Si bien es de suma sencillez, no tiene en cuenta lo que ocurre una vez logrado el recupero del capital invertido, prestando excesiva atención al mediano y corto plazo.

Mediante el uso de equivalentes de certeza que se expone en el capítulo 3, por aplicación de un factor, se transforman los flujos futuros inciertos en sus equivalentes de certeza, buscando soslayar el problema derivado de que el uso de un tipo de descuento constante, no implica considerar un riesgo constante, sino un riesgo creciente.

La asignación de probabilidades a los posibles diferentes flujos de fondos, constituye uno de los principales temas de los métodos estadísticos para el tratamiento del riesgo, que se desarrolla en los capítulos 3 a 10. Luego de asignar probabilidades a los posibles valores de los ingresos se determina el valor monetario esperado. La asignación de probabilidades -generalmente subjetivas- obliga a un análisis mayor que en los métodos anteriores. Sin embargo, a medida que el proyecto deja de ser relativamente pequeño con relación a los recursos totales de la empresa, aflora la actitud frente al riesgo involucrado en el proyecto. A partir de ese evento se consideran los límites extremos de los flujos de fondos y las probabilidades que se produzcan pérdidas que afecten la estabilidad de la empresa.

Entre las medidas de dispersión de los ingresos futuros se analizan las más empleadas, como la varianza y la desviación estandar, la semi-varianza como intento de considerar solamente los valores por debajo de la media, la media geométrica y los coeficientes de variación, que establecen índices relativos entre los valores de las medidas de dispersión y los valores esperados o los capitales invertidos en el proyecto. Dentro de estos enfoques se considera la introducción de restricciones a los valores de las medidas de dispersión, para centrar el estudio en los proyectos que se ubican dentro de límites de riesgo preestablecidos por el tomador de decisiones.

En el capítulo 4 se analiza la independencia o dependencia de los flujos futuros de fondos y los distintos valores que resultan para las respectivas varianzas. Se expone la correlación de los flujos dependientes y las medidas utilizadas para dimensionarla, tales como la covarianza y el coeficiente de correlación. Para la consideración de combinaciones de mutua independencia y perfecta correlación se sigue el modelo de Hillier y se detalla el uso de probabilidades condicionales para el tratamiento de correlaciones moderadas.

El uso del método bayesiano para la obtención de información adicional es el tema del capítulo 5, donde se expone el camino a seguir para estimar hasta que costo es conveniente obtener mayor información. El análisis bayesiano aplicado, es un intento de incorporar toda información relevante disponible, considerando creencias personales y probabilidades subjetivas y combinándolas con evidencia adicional que revisa y modifica la evidencia existente, pero no la desecha. Por medio de información adicional se busca disminuir el riesgo.

El capítulo 6 trata de las decisiones secuenciales y la utilización del árbol de decisión para su consideración. La utilidad del árbol de decisión surge al poner en evidencia los riesgos, alternativas y resultados de los proyectos de inversión, clarificando su estructura. Por aplicación del criterio de dominancia se eliminan ramas alternativas y en un proceso de análisis conocido como inducción hacia atrás, comenzando en la parte final del diagrama de decisión y retrocediendo hacia el origen se van definiendo valores hasta arribar a unas pocas alternativas cuyos equivalentes de certeza o valores monetarios esperados hacen obvia la elección.

El capítulo 7 se dedica a la consideración de múltiples variables y el estudio de la simulación como medio de tratarlas mediante el auxilio de la computación. A la localización de las variables importantes sigue la determinación de su distribución de probabilidades. Seguidamente se procede a simular repetidamente el mundo real, empleando combinaciones al azar de los posibles valores de las variables y se logra una secuencia de resultados que proporcionan las consecuencias esperadas de los distintos cursos de acción posibles, que permite comparar los perfiles de riesgo y rendimientos. Se desarrollan dos casos prácticos, uno de los cuales es el primer análisis de riesgo efectuado por el Banco Internacional de Reconstrucción y Fomento, para el estudio del proyecto de un puerto en Somalia. De la teoría de la utilidad se ocupa el capítulo 8. Por

medio de esta teoría se modifica el enfoque del valor monetario esperado, centrado en el promedio ponderado sin considerar la dispersión de los posibles resultados. Cuando las posibles pérdidas tienen valores elevados en relación al patrimonio total ejercen una fuerte influencia en la decisión. El moderno concepto de utilidad busca incorporar las preferencias de riesgo de la persona, en una forma explícita al procedimiento de decisión, asignando mayor o menor utilidad a resultados similares conforme con la función de utilidad de cada individuo. Si bien la función de utilidad es propia de cada individuo, una vez determinada puede ser aplicada por otros para la toma de decisiones en su nombre.

En el capítulo 9 se desarrolla el tema de las inversiones riesgosas y su resolución en el tiempo. Se reivindica en parte el método del período de repago al considerar que tiene la ventaja de medir el tiempo necesario en que se espera que la incertidumbre sea resuelta. Se expone como puede mantenerse la relación total de riesgo aceptada por la firma, escalonando las inversiones riesgosas a medida que se va resolviendo la incertidumbre de las anteriores inversiones. Manteniendo el nivel de riesgo dado, no hace diferencia que sea el resultado de un conjunto de inversiones estables que tardan en resolver su incertidumbre, o por un conjunto de nuevas inversiones que se van incorporando año a año y que resuelven su incertidumbre rápidamente.

En las inversiones en equipos especiales altamente automáticos, se destaca el problema de su vida útil tecnológica que presenta riesgos adicionales; además, especial consideración deben merecer los costos de diseño, de ingeniería de producción, equipos complementarios necesarios y los cambios en las inversiones en inventarios.

El problema de elegir un conjunto de inversiones que globalmente tengan características deseables, es tratado en el capítulo 10, Teoría del Portafolio. El riesgo involucrado en una inversión aislada puede ser diferente del cambio de riesgo que ocurre al incorporar esa inversión a un portafolio. No se busca la mejor inversión individual -dado el nivel de riesgo-, sino del grupo de inversiones que cumple esas condiciones. El objetivo

de la diversificación no es reducir la dispersión sino lograr que la combinación riesgo-retorno sea la mejor posible, lo que depende de la función de preferencia del inversor. La reducción de los riesgos se mide por las covarianzas o correlaciones entre las diferentes combinaciones de pares de inversiones. Markowitz es el creador de la teoría del portafolio, desarrollada por Tobin, Sharpe y Lintner entre otros.

Como medio de simplificar los voluminosos cálculos de computación que el modelo de Markowitz hace necesarios, se ha sugerido que las covarianzas se establezcan en relación a un índice general -modelo diagonal de Sharpe- o a un reducido número de índices. Si bien la teoría del portafolio fue concebida para las inversiones en valores mobiliarios, se aconseja su utilización para la selección de proyectos de inversiones de capital. En esta aplicación se debe considerar a las inversiones existentes como un conjunto que forma parte de todos los posibles portafolios a considerar.

En el capítulo 11 se considera el criterio de decisión a adoptar en caso de completa incertidumbre. Se exponen los criterios de indiferencia, maximin, maximax, de optimismo de Hurwicz y del lamento de Savage. La teoría de los juegos es también objeto de consideración, en casos de ignorancia completa. Se afirma, sin embargo, que siempre se tiene algún conocimiento que permite considerar la incertidumbre mediante la asignación de probabilidades subjetivas, aún cuando éstas no resulten muy ajustadas.

Con el auxilio de las probabilidades de indiferencia -Capítulo 12- se determinan los límites dentro de los cuales una alternativa es preferida a otra, lo que nos da una base más cierta de elección que nos permite utilizar las probabilidades subjetivas y verificar su grado de confianza mediante el análisis de sensibilidad.

El tratamiento de la inflación como un riesgo se trata en el capítulo 13. La inflación es una variable difícil de pronosticar y no se modifica necesariamente en igual medida los valores de las diferentes variables involucradas en los proyectos de inversión. Además causa cambios

de importancia en el costo del dinero, erosionando el valor real del capital. Se originan también situaciones impositivas especiales, sobre el ahorro nacional y la política de endeudamiento de las empresas. La inflación otorga gran preponderancia al corto plazo. Para la consideración de la inflación, se desarrolla el enfoque clásico que encara el pronóstico integral de la inflación sobre los componentes de la inversión y su flujo futuro de fondos para seguidamente proceder a su deflación a valores constantes, todo ello con un cúmulo de dificultades prácticas. En la búsqueda de superar esas dificultades se analiza el enfoque residual, considerando únicamente por sus consecuencias netas, la influencia de la inflación en la posición neta de activos y pasivos monetarios y deflacionando esta posición y los costos financieros correspondientes, llegando a la médula del problema y proyectando las demás variables bajo la presunción de moneda estable.

La decisión de abandono en los casos en que puede resultar conveniente desprenderse de un activo o una actividad por haber perdido sentido económico su continuación -no obstante la tendencia natural para su prosecución- se expone en el capítulo 14. Un proyecto se abandonaría cuando su valor de abandono excede el valor actual neto de los flujos futuros de fondos o cuando la tasa interna de retorno es menor que el costo de capital. Eliminando el riesgo de valores actuales negativos mediante el uso del abandono cuando los eventos se vuelven desfavorables, se mejora el valor actual total del proyecto. Como la opción de abandono por definición de su regla nunca disminuye el valor actual neto, su no consideración subestima su valor.

Lo más importante es determinar si la empresa como un todo se encontrará en mejor situación o no luego del abandono. Una decisión de rechazar el abandono es similar a una decisión de invertir en la actividad involucrada el valor de recuperación de la inversión.

En el capítulo 15 se analizan los cambios en los riesgos comercial y financiero de la firma y su incidencia en el costo de capital. Respecto del riesgo comercial al reducir el riesgo total de la firma puede mejorarse la rentabilidad de la misma si se concreta una reducción del costo del capital. La adición de deudas a la estructura de capital afecta el riesgo

financiero de la empresa afirmándose que el costo de obtener capital de una firma es una función financiera de su estructura de capital.

En la Parte III Conclusión, capítulo 16 Resumen y tesis, se realiza el análisis crítico de los métodos de decisión expuestos, destacando los más adecuados para el tratamiento del riesgo en proyectos de inversión.

Capítulos 1 y 2 - REFERENCIAS BIBLIOGRAFICASLibros

- 3- BERANEK Analysis for financial decisions, Cap. 2.
- 5- BIERMAN Capital budgeting decision, Cap. 11 y 16.
- 6- BYRNE Investment under uncertainty, Cap. II.
- 8- FINDLAY Analysis for managerial finance, Cap. 2.
- 10- FARRAR Investment decision under uncertainty, Cap. 1.
- 13- GRAYSON Decisions under uncertainty, Cap. 9.
- 17- HIRSHLEIFER Investment, interest and capital, Cap. 8.
- 26- MASSE Elección inversiones, Cap. V.
- 27- MESSUTI Finanzas de la empresa, Parte Quinta.
- 33- NAA Decisiones de reemplazo de equipos, Apéndice Domingo J. Messuti.
- 35- PORTERFIELD Investment decisions, Cap. VII.
- 39- REUTLINGER Project appraisal under uncertainty, Cap. I.
- 40- ROBICHEK Investigaciones y decisiones financieras, Cap. 5, C.J. Grayson.
- 41- ROBICHEK Decisiones óptimas financieras, Cap. V.
- 45- SCHMITT Measuring uncertainty, Cap. 1.
- 55- WRIGHT Discounted cash flow, Cap. 8.

Artículos

- 72- HERTZ Incertidumbre en proyectos de inversión.
- 95- ROBICHEK, A. &
MYERS Risk-adjusted discount rates.
- 108- WOODS Estimates involving uncertainty.

PARTE II

METODOS DE DECISION

Capítulo 2 - METODOS PRACTICOS

2.1. Pronósticos conservadores

Uno de los problemas actuales más importantes es como localizar la incertidumbre en la información.

En un mundo que crece horizontalmente por la diversificación y verticalmente por la integración, no es posible que el ejecutivo tenga perfecto conocimiento de las complejas técnicas y las distintas áreas en las que la empresa está situada.

Las distorsiones ocurren a causa que los expertos no están seguros acerca de lo que realmente desea la empresa y la capacidad para tomar riesgos difiere entre los individuos.

Por el método de pronósticos conservadores se reducen las estimaciones efectuadas con el criterio de estimaciones más probables y subjetivas e intuitivamente se aumenta la probabilidad de ser alcanzadas mediante una reducción del nivel originalmente previsto.

En muchos casos se otorga mayor validez a los pronósticos de los resultados de los primeros años y se le asigna menor confiabilidad a los ingresos de los años siguientes.

Por esta vía se procede a ajustar en forma arbitraria si se quiere, los ingresos de los años más lejanos (33).

Al reducir los pronósticos, implícitamente se considera el riesgo y su aversión por parte de los analistas. Por otra parte en las empresas con más de un nivel de ejecutivos, el sistema de control de ejecución hace que sea preferible y digno de elogio cuando se excede la estimación original y es objetado y provoca problemas al pronosticador cuando la realidad no alcanza los valores pronosticados.

En esas circunstancias los ejecutivos de niveles inferiores tornan a ser conservadores en sus estimaciones para tener gran probabilidad de excederlas en la práctica; a su vez los ejecutivos superiores, responsables ante la autoridad máxima de la empresa vuelven a hacer más conservadoras las estimaciones anteriores para cuidar su posición personal, o por el contrario es factible que se anticipen pronósticos elevados, previendo que serán disminuidos por los niveles superiores.

Ello ocasiona que buenas oportunidades sean desechadas por exceso de precaución. Si además se aplica posteriormente el método del período de recuperación o se utiliza tasa de descuento ajustadas por riesgo se haría una consideración duplicada del riesgo.

El error de pasar por alto valiosa información es el rasgo común de los enfoques de los pronósticos conservadores, período de reintegro y tasa de descuento ajustada al riesgo.

2.2. Tasa de descuento ajustada por riesgo.

El método de la tasa de descuento ajustada por riesgo, es posiblemente el método más simple. La tasa de retorno requerida varía directamente con el riesgo que se asigna al proyecto.

Se incrementan las tasas de descuento en función directa del riesgo involucrada afirmándose que con ello se concreta un premio al riesgo corrido, considerándose lógico que los que emprenden proyectos riesgosos tengan recompensas mayores que aquellos que se limitan a negocios más seguros.

La tasa de descuento a utilizar comprenderá, en este criterio, dos aspectos:

1) Considerar las preferencias de tiempo por medio de una tasa de descuento libre de riesgo, o sea la tasa de rendimiento de inversiones muy seguras.

2) Considerar las preferencias de riesgo del inversionista conforme con la categorización que haya realizado en función de su acti-

tud frente al riesgo.

Siguiendo este criterio, en inversiones más riesgosas, al emplearse mayores tasas de descuento, se obtiene menores valores actuales. En la medida que la rentabilidad de un proyecto riesgoso logre superar la detracción que origina una tasa de descuento mayor, el proyecto será aceptable sobre otros más seguros.

La aceptación de este criterio hace necesario que el empresario deba asignar a cada proyecto la tasa que estima adecuada conforme al riesgo involucrado en el proyecto. No puede negarse el alto grado de subjetividad que esto importa. Una manera sugerida para superar esta dificultad consiste en ubicar cada proyecto entre diversas clases de riesgos y utilizar luego las tasas de descuento que se han asignado a cada clase de riesgo, con la ventaja que la asignación puede ser el resultado de resoluciones generales del conjunto de asesores de la empresa, quitándole parte de la gran subjetividad del criterio (40).

La clasificación de los proyectos conforme a su riesgo creciente se supone deriva de la naturaleza misma del proyecto y así se pueden tener las siguientes categorías:

- 1) Proyectos de renovación de equipos existentes para reducir costos sin cambios en el proceso fabril.
- 2) Proyectos de cambio de procesos productivos por nuevos equipos, pero para producir los mismos volúmenes de los mismos productos.
- 3) Proyectos para expandir sustancialmente la producción de productos existentes.
- 4) Proyectos que involucran la introducción de nuevos productos en un mercado existente y probado.
- 5) Proyectos de lanzamiento de nuevos productos en nuevos mercados.
- 6) Proyectos para producir nuevos equipos automáticos altamente especializados.
- 7) Proyectos de investigación y desarrollo.

También se puede considerar subdivisiones en función de la elasticidad o inelasticidad de la relación demanda/ingreso de los artículos a producir.

Una vez que se ha concretado una escalación de riesgos se procede a asignar a cada categoría una tasa de descuento o tasa de corte (33).

La clasificación en categorías tiene deficiencias teóricas evidentes al presumir que todos los proyectos ubicados en una misma categoría tienen el mismo grado de incertidumbre y al considerar asimismo que un proyecto de una categoría es más (o menos) incierto, que todos los proyectos ubicados en una misma categoría distinta de la primera. Dentro de una misma clase se dejan de lado las peculiaridades de cada proyecto en particular.

Por otra parte la fijación de las categorías y del criterio de elección entre éstas, en la gran mayoría de los casos se hace en forma arbitraria. Esto no se logra superar tampoco fijando a cada proyecto un criterio de aceptación subjetivo en función de su grado supuesto de incertidumbre.

En el criterio de la tasa de descuento ajustada al riesgo al igual que el criterio del período de recupero, las características positivas son la sencillez y fácil entendimiento. Aún cuando su enfoque no es el más aconsejable, tiene la virtud de destacar la aversión al riesgo e intenta dar solución al problema de la incertidumbre de los flujos de fondos.

Se critica que el empleo de tasas de descuento constantes -tal es su forma típica de aplicación- supone considerar que la porción de la tasa que corresponde por ajuste de riesgo aumenta en proporción constante con relación al tiempo.

Si por el contrario se sustenta que el ajuste por riesgo es constante a través del tiempo, al ser también constante la tasa libre de riesgo, la tasa de ajuste por riesgo resulta decreciente. La desventaja de esta situación es que generalmente no es conocida por quienes utilizan este enfoque, o sea que si bien la tasa ajustada es en sí misma correcta si se conocen los supuestos en que debe necesariamente basarse, el desconocimiento de estos supuestos hace que se aplique el método sin entender sus alcances.

Donde se nota sus debilidades es al considerar que en caso de individuos inclinados al riesgo, la tasa de descuento, con similar argumentación, debería reducirse por debajo de la tasa libre de riesgo o sea pagar un premio por el riesgo.

Muchos empresarios consideran que el empleo de la tasa de descuento ajustada al riesgo tiene resultados dudosos o poco eficaces, en la medida que las estimaciones de los flujos futuros de fondos no dejan de ser arbitrarias. También consideran que no es lógico extender el concepto de descuento por preferencia en el tiempo, para incluir ajustes por riesgo. Sin embargo dentro de este marco también puede argumentarse que un período determinado de recupero basado en estimaciones bastantes precisas, se deje de lado eligiendo otro proyecto con un período de recuperación menor basado en estimaciones poco precisas (40).

Este método no es muy satisfactorio por cuenta:

- 1) No se hace ningún esfuerzo por cuantificar y medir el riesgo, lo que hace al método muy subjetivo.
- 2) La tasa es computada sobre la base de estimaciones únicas de las variables y no se estima correctamente la verdadera posibilidad de producir beneficios que tiene el proyecto.
- 3) Al combinar en una sola tasa la actitud del inversionista con respecto al valor tiempo del dinero con su actitud frente al riesgo, se llega a que finalmente nada es medido bien.

El uso de la energía atómica para generar electricidad es un ejemplo tangible de situaciones en que la incertidumbre está en el diseño, construcción y operación de la planta que, por tratarse de problemas de ingeniería nuevos, su costo puede ser casi impredecible. Los ingresos por el contrario tendrían en este caso bastante certeza. El uso de tasas de descuento ajustadas no tendrían razón de ser para tratar este riesgo.

Para dar una idea del supuesto que la diferencia en riesgo en dos inversiones aumenta en razón de tiempo, supuesto que hemos dicho que puede que no sea correcto, Veamos algunos ejemplos:

Un ingreso de \$10.000, descontado un año al 10% y al 20% da \$9.091 y 8.333 respectivamente y la razón $\frac{9.091}{8.333}$ es igual a 1.09, el mismo ingreso descontado 50 años a las mismas tasas da \$85 y \$1.-,

$$\text{y la razón } \frac{85}{1} = 85$$

Aún cuando el supuesto que a medida que pasa el tiempo aumenta el riesgo sea aceptado, debemos considerar si el uso de la tasa de descuento ajustada mide adecuadamente el mayor riesgo, en nuestro ejemplo el riesgo entre el año 1 y el año 50 debería ser proporcional a 1,09 y a 85 respectivamente.

Con períodos muy cortos de tiempo la elección usando mayores tasas de descuento falla al no poder introducir efectivamente la actitud hacia el riesgo del inversor.

Si bien es cierto que la mayoría de los inversores exigirán ingresos mayores en caso de inversiones riesgosas que con inversiones menos riesgosas, es una tarea muy dificultosa determinar la medida exacta en que la tasa de descuento libre de riesgo debe ser aumentada para los diferentes grupos de riesgos.

Si por el contrario la tasa de descuento refleja solamente el valor del dinero en el tiempo, se puede usar una función de utilidad para abstraer del valor actual esperado el premio por riesgo, para obtener el valor monetario neto final.

Al usar tasas de descuento ajustadas por riesgo se tiende a dirigir la decisión de inversión en la dirección adecuada por cuanto se torna más difícil aceptar inversiones riesgosas, pero ello se hace en forma incorrecta e inconsistente (5).

2.3 Período de devolución

El período de recupero o devolución es uno de los métodos más utilizados, sobre todo en los primeros tiempos, para la consideración del riesgo.

Por este método se determina el período de tiempo requerido para recuperar la inversión original por medio de los ingresos futuros; la elección será por el proyecto cuyo tiempo de recuperación sea el más corto posible y en algunas empresas no se aceptan proyectos cuyo período de recuperación supere, por ejemplo, tres años.

Este lapso u otro elegido cumple una función de restricción similar a la tasa de corte. Si no se supera esta restricción el proyecto no se considera ni entra en la etapa de las alternativas a elegir.

Si alguna virtud se le puede asignar a este criterio es su sencillez lo que lo hace fácilmente entendible por la generalidad de los empresarios y por ende de amplia aceptación. Si bien presta especial consideración al riesgo, al centralizar la atención a los primeros años del proyecto y la liquidez a mediano plazo de la firma, deja innecesariamente fuera de comparación las utilidades que se generan una vez logrado el recupero del capital invertido ignorándose por consiguiente el rendimiento neto total de la inversión y poniendo especial énfasis en la

liquidez del programa de inversiones.

Se aduce en favor de este método que otorga preferencia a aquellos proyectos de plazo más corto, evitando el mayor riesgo implícitamente involucrado en los proyectos de plazo más largo.

La comparación entre distintos proyectos posibles se ve dificultada, no sólo porque generalmente difieren entre sí en cuanto a su magnitud, sino también en cuanto a la extensión del período durante el cual se producirán los egresos y los ingresos. Debido a estas circunstancias propias de la vida de los proyectos, hace ya mucho tiempo que se ha reconocido la ineficiencia de los procedimientos de análisis que se limitan a sumar ingresos y egresos.

Rappaport citado por C. Jackson Grayson ha sugerido el empleo del período de devolución con descuento, haciendo los flujos de fondos equivalentes en el tiempo y eligiendo el proyecto con menor período de recuperación. Esta alternativa es un intento de conciliar ventajas e inconvenientes de ambos criterios. (40)

Este método puede ser aplicable en casos de indiferencia entre proyectos mutuamente excluyentes con valores actuales netos esperados similares, en los que el período de recupero se determina por los valores esperados de los flujos de fondos descontados a la tasa de costo de capital. Sería un método subsidiario del valor monetario esperado.

Bierman plantea un caso particular de utilización del período de recupero basado en que en caso de ingresos futuros constantes, para que un proyecto sea aceptable: Ingreso anual $\times a \overline{n} i \gg$ inversión original, y si dividimos por Ingreso anual: $a \overline{n} i \gg$ Inversión original / Ingreso anual $\therefore a \overline{n} i \gg$ Período de recupero.

Si la vida del proyecto tiende al infinito, el período de recupero máximo aceptable se acerca al límite I/i , en los casos que

existe una gran incertidumbre acerca de la vida útil del proyecto y se trata de proyectos con ingresos futuros constantes (40).

Se busca el valor mínimo de $a \bar{n} | i$ que sea mayor que el período de recupero y se obtiene así un valor de n que es el mínimo aceptable de vida útil.

Si un proyecto tiene un período de recuperación de 5 años, aunque esté por encima del establecido por la empresa, podría aceptarse por cuanto si hacemos $i = 0,10$ el valor mínimo superior a 5 de

$$a \bar{n} | 0,10 \text{ es } a \bar{n} | 0,10 = 5,33$$

Pero este argumento es aplicable, también en este caso especial, para decidir si la probabilidad que la vida útil esperada sea mayor de 7 años, hace aceptable el proyecto, por el método del valor monetario esperado o por el criterio de la tasa de descuento ajustada al riesgo.

2.4 Comparación entre Tasa de Retorno Exigida y Calculo de equivalentes en certeza.

Los tipos de descuentos exigidos provocan grandes contradicciones, por lo que es preferible el uso de equivalentes de certeza.

En el uso de equivalentes de certeza se emplea un factor $0 \leq \alpha_t \leq 1$ que para cualquier tipo de riesgo adquiere un valor tal que resulta indiferente para el inversionista entre el flujo de fondos en certeza F_t^* y el flujo esperado,

$$\bar{F}_t \text{ o sea } F_t^* = \alpha_t \bar{F}_t$$

Con el factor α_t , que corresponde a la función de utilidad del inversionista, se resumen los efectos del riesgo. Por tanto

α_t se acercara a su valor máximo 1, cuando la forma de la distribución y su dispersión sean interesantes para el inversionista y los ingresos sean independientes de otras inversiones del inversionista constituyendo una real diversificación.

El uso de tipos de descuento reajustados al riesgo, para ser válido, debe proporcionar idénticos resultados que los flujos futuros ajustados por el factor α empleando una tasa de descuento libre de riesgo,

$$\frac{F^*t}{(1+i)^t} = \frac{\bar{F}t}{(1+k)^t} = y \text{ como } \alpha_t = \frac{F^*t}{\bar{F}t}$$

$$\alpha_t = \frac{(1+i)^t}{(1+k)^t} \text{ y } \alpha_{t+1} = \frac{(1+i)^{t+1}}{(1+k)^{t+1}} = \frac{(1+i)^t}{(1+k)^t} \cdot \frac{(1+i)}{(1+k)}$$

y como $\alpha_t = \alpha_{t+1}$ esto se contradice al no ser $(1+k)/(1+i)=1$, por ser k mayor que el tipo i sin riesgo. Para eludir esta contradicción se debería usar para cada flujo futuro un tipo k distinto, lo que supone que los distintos k no son idénticos o que si $k_1 = k_2 = \dots = k_t = k_{t+1}$, los flujos futuros no son igualmente riesgosos o sea, α_t no es constante. Todo esto difiere de la afirmación que el uso de un tipo de descuento constante implica un riesgo constante.

Si α_t no es constante para que el resultado sea equivalente a la utilización de tipos de descuentos ajustados, α debe disminuir a un ritmo constante con el transcurso del tiempo. O sea, que k unicamente es aplicable cuando el riesgo de los ingresos previstos α_t aumenta a un ritmo constante en función del tiempo. Si tenemos $i = 0,04$ y α disminuye 10% por año,

$$\alpha_0 = 1; \alpha_1 = 0,9; \alpha_2 = 0,9 \times 0,9 = 0,81 = \alpha_1 (1+i) / (1+k)$$

$$0,81 = (1,04 / (1+k)) 0,9 \quad \therefore \quad 1+k = \frac{1,04}{0,81/0,9} \approx 1,156 \quad k = 0,156$$

Veamos los importantes errores que pueden producirse:

Si α_t e \bar{i} son constantes, los tipos k tienen que disminuir con el tiempo.

Si tomamos $\bar{F} = 15$ $\alpha = 2/3$ $\bar{i} = 0,04$ tenemos,

$$15(2/3)/1,04 + 15(2/3)/1,04^2 + \dots + 15(2/3)/1,04^\infty = 250$$

El tipo de descuento compuesto exigido \hat{k} que hace el valor descontado de $\bar{F}_t = 250$ es igual a $\bar{F}/P_0 = 15/250 = 0,06$

$$\text{Para } t = 1 \quad VA = 15(2/3)/1,04 = 10/1,04 = 9,615 \text{ y } 9,615 = 15/(1+k_1) \quad \therefore$$

$$k_1 = (15/9,615) - 1 = 0,56$$

el valor kt disminuirá a medida que aumente t y al acercarse al infinito k se acercará al tipo sin riesgo \bar{i} .

Si una reducción de \$1.- en el momento $t = 0$ permite aumentar \$1,50 en $t = 1$ esta alternativa proporciona un rendimiento previsto del 50%.

Si α_t se mantiene en $2/3$ vemos que el valor actual neto de la inversión de \$1.- en t_0 es

$$\frac{\alpha_1 (\Delta \bar{F}_1)}{1+i} - \Delta F_0 = \frac{2/3 (1,50)}{1,04} - 1 \cong -0,04$$

lo que no constituiría una decisión aceptable, como estaría confirmado empleando:

$$k_1 = 0,56 \quad \frac{1,50}{1+0,56} - 1 = \frac{1,50}{1,56} - 1 \cong -0,04$$

Pero si descontamos al tipo medio exigido $\hat{k} = 0,06$

$$\frac{1,50}{1,06} - 1 = 0,41 \text{ lo que constituye una distorsión de su}$$

valor real

El planteamiento del equivalente de certeza resume directamente las preferencias del inversionista y el planteamiento del tipo de descuento al hacerlo indirectamente constituye la raíz de sus dificultades (41).

Capítulo 3

3.1 EQUIVALENTES DE CERTEZA

Las situaciones de riesgo pueden ser tratadas intentando reducirlas a una situación de equivalente de certeza, consistente en hacer una apropiación intuitiva del grado de riesgo involucrado con los flujos de fondos. Se computa el mejor valor único estimado del flujo de fondos para cada período. Esta cifra puede ser el valor más probable o la media o el modo, no hay diferencia en el tratamiento ya sea que se conozcan o no las probabilidades de los diferentes flujos posibles.

El equivalente de certeza es pues el valor garantizado que el empresario estaría dispuesto a aceptar en lugar de los valores inciertos que pueden resultar de los diversos eventos. Debe entenderse que este valor debe ser acompañado por exactamente la misma base no monetaria de activos.

Si por ej.: Un empresario cuya planta se ha incendiado, no contaba con seguros y precisa \$150.000 para reconstruirla, aceptará esta suma en vez de asumir el riesgo de dos eventos equiprobables que le representan utilidades de \$100.000 y \$300.000 por cuanto no desea correr ningún riesgo de no poder reconstruir su planta. Por el contrario si sus valores activos no monetarios son totalmente adecuados para la continuidad de sus negocios podría estar decidido a no aceptar que sus valores terminales de activos bajen de \$200.000.

No existe un equivalente de certeza verdadero aunque no conocido, ni tampoco una estimación del equivalente de certeza. El equivalente de certeza es pura y simplemente una decisión (43).

Con el uso del equivalente de certeza se intenta incorporar la aversión al riesgo a los modelos formales de decisión. En esencia, el criterio de equivalente de certeza supera el supuesto de que

las preferencias expresadas en dinero son lineales.

Una vez que el analista ha establecido su indiferencia entre un juego con las alternativas de un conjunto de consecuencias asociadas y un juego estandar que asocia esas mismas consecuencias a los correspondientes eventos, debe necesariamente asignar a ambas el mismo equivalente de certeza. Por tanto se puede considerar el equivalente de certeza que se asignaría al juego del mundo real, computando el que se asignaría al juego estandar.

Para tomar su decisión el analista debe efectuar dos clases de consideraciones completamente diferentes.

1) Las posibilidades que tienen los eventos posibles, uno de los cuales determinará su valor terminal si él no elige aceptar el valor garantizado.

2) Su propio grado de deseo de recibir una suma cierta en relación a los posibles valores terminales que pueden resultar.

Con respecto a las posibilidades considerará toda la información disponible y consultará la opinión de expertos en el tema específico.

Con referencia al grado de preferencia personal considerará los probables efectos de cada uno de los valores terminales en el futuro desenvolvimiento de su actividad económica. O sea la decisión depende de la evaluación de las posibilidades de todos los eventos posibles y las actitudes hacia todas las posibles consecuencias. Otro individuo en exactamente la misma situación y teniendo exactamente la misma información puede determinar equivalentes de certeza diferentes.

Veamos una aplicación de este criterio:

El ejecutivo principal y socio mayoritario de una empresa de producción de petróleo, debe iniciar en cuatro semanas los trabajos de perforación de un pozo petrolífero, caso contrario su opción caduca. La opción se encuentra ubicada en una región reconocida como productiva, con formaciones geológicas adecuadas. De 70 pozos perforados últimamente, 7 son productores de petróleo, 14 producen en forma combinada gas y petróleo, 28 solamente petróleo y 21 resultaron improductivos. El costo total de la perforación neto de impuestos es de \$100.000 y el valor actual neto de la producción es de \$150.000.- para un pozo de gas, \$200.000.- para un pozo que produce gas y petróleo y \$300.000.- en caso de producir solamente petróleo. En caso de vender la opción, obtendría \$15.000.- En la zona se han detectado tres formaciones geológicas, la "A" generalmente improductiva, la "B" con existencia casi segura de gas y la "C" con gran probabilidad de obtener petróleo. En la zona se han efectuado pruebas sismográficas con las siguientes predicciones previas y posterior resultado al perforar los pozos:

	Treinta pruebas Sismográficas		Resultado del pozo			
			Seco	Gas	Gas y Petróleo	
		Petróleo			Petróleo	
Formación "A"	12	40 %	75%	25%	--	--
Formación "B"	15	50 %	--	60%	40%	--
Formación "C"	3	10 %	--	--	--	100 %

El costo de efectuar la prueba sismográfica es de \$30.000.-

El empresario tiene que decidir entre tres acciones iniciales a tomar: perforar sin hacer prueba, hacer la prueba sismográfica o vender su opción. En este último caso, conoce con certeza su consecuencia monetaria: \$15.000.- Si decide perforar sin hacer la prueba previa, las consecuencias monetarias de su decisión ya no están bajo su control. Si de la perforación resulta un pozo con petróleo, la empresa aumentará su Valor Actual Neto en \$200.000.- (\$300.000.- menos \$100.000.- de costos); en la eventualidad de una combinación gas-petróleo \$100.000.- y \$50.000.-

si el resultado fuera un pozo de gas. Si resultase un pozo seco, se perderían los \$100.000 del costo de perforar.

El equivalente de certeza que tendrá para el empresario tomar esta decisión estará entre \$+200.000.- y \$-100.000.- y depende de su apreciación acerca de las probabilidades que asigne a cada evento posible y sus preferencias por ingresos alternativos a la vista de su situación financiera global. Dependerá en forma apreciable del impacto que produciría en la firma la posibilidad de perder \$100.000.- Debe pues considerar sus apreciaciones sobre las probabilidades relativas y sus preferencias por un juego alternativo. Supongamos que para él esta alternativa vale \$20.000.- y que estaría decidido a cederla únicamente en caso que se le ofrezca una suma mayor; \$20,000.- sería entonces el equivalente de certeza de su decisión de perforar sin hacer la prueba sismográfica. Pasemos a la posibilidad que su decisión fuera hacer la prueba sismográfica. El resultado de esta prueba no cambia para nada la probabilidad de cada evento en caso de perforar, pero su resultado afectará el grado de atracción que tendrá para él perforar, en caso de indicar la prueba la existencia de formaciones B ó C.

Si la prueba indica una formación "A", los posibles eventos son, en caso de perforar:

	Resultado de:		
	Perforar:		No perforar:
	Gas	Seco	
Formación "A"	20.000.-	-130.000.-	-30.000.-

El equivalente de certeza de la decisión de perforar con formación "A", puede ser para el empresario de \$-90.000.- por tratarse de una formación marcadamente desfavorable. Con esta evaluación, evidentemente, decidirá no perforar, pues ello le producirá una pérdida menor \$-30.000.-

Si el resultado de la prueba es una formación "B", el equivalente de certeza de la decisión de perforar será positivo y dependerá de la asignación de valor que resulte de considerar que encontrará gas o una combinación de gas-petróleo que le significará \$20.000.- ó \$70.000.- de valor actual de las utilidades netas, descontando los \$130.000.- de tomar la prueba y perforar. Supongamos que el equivalente de certeza sea \$40.000.-, en tal caso su decisión será perforar por cuanto la alternativa de no hacerlo le produciría una pérdida de \$30.000.-

Si el resultado de la prueba sísmográfica fuera una formación "C", se tendría la posibilidad de obtener estos resultados :

Pozo con petróleo	\$170.000.-
Pozo con gas-petróleo	70.000.-
Pozo con gas	20.000.-
Pozo seco	-130.000.-

Dado que en caso de detectarse una formación "C" es virtualmente seguro que se logrará obtener petróleo, considera que puede eliminar la incertidumbre en esta eventualidad y toma como su equivalente de certeza \$170.000.-, aunque puede ocurrir que otros empresarios no concuerden con su criterio, pero no debemos olvidar que es su decisión la que debe permanecer como propia y que ésta es el resultado de su razonamiento.

Simplificando el problema, tenemos ahora los equivalentes de certeza.

Perforar sin prueba sísmica	Perforar con prueba			Vender la opción
	Formación			
	A	B	C	
\$ 20.000.-	-30.000	40.000	170.000	15.000

El único problema pendiente es reducir el simple juego de tomar la prueba a su equivalente de certeza.

Considerando de acuerdo a su criterio las distintas probabilidades de los resultados que obtendría luego de efectuar una prueba sísmica, supongamos que el empresario decide que para él la oportunidad de hacer la prueba tiene un valor equivalente de \$25.000.-

Su decisión puede ya ser tomada por cuanto tiene tres equivalentes de certeza; simplemente elegirá el que tenga el mayor valor. Su decisión sería pues hacer la prueba y perforar en caso de que el resultado sea una formación B ó C. (11)

También se suele presentar el método del equivalente de certeza con la siguiente formulación

$$VAN = \sum_{t=0}^n \frac{\alpha_t F_t}{(1+i)^t}$$

donde F_t es el flujo de fondos en el período t

i = tasa de interés libre de riesgo,

$0 \leq \alpha_t \leq 1$ coeficiente de equivalente de certeza

que varía inversamente con el riesgo del flujo en el período t .

Este método reduce el flujo de fondos de cada año teniendo en cuenta el riesgo y el importe resultante $\alpha_t F_t$ es considerado como un ingreso cierto, a una tasa de descuento libre de riesgo (tasa pura de descuento).

3.2 Valor monetario esperado.

Hemos visto hasta ahora el pronóstico típico de un solo factor. Sin embargo la cifra única en las estimaciones no permite conocer la distribución de probabilidades y tampoco se conoce si lo que se declara como la estimación más probable corresponde a la mediana, al modo o, lo que sería más correcto, a la media.

A menudo con el propósito de simplificar la evaluación subsecuente se utiliza un único valor con indicación de la probabilidad que el nivel real no alcance dicho valor.

En general si la probabilidad que, por ejemplo, las ventas reales no alcancen los niveles pronosticados es 50% o menos, se refiere como pronóstico conservador o pesimista. Si por el contrario, las probabilidades de tener un error por defecto en los pronósticos, es mayor del 50%, se lo considera como especulativo u optimista.

A veces se intenta poner de relieve los riesgos, tomando valores altos, medios y bajos de los factores estimados y calculando las tasas de rendimiento resultantes según varias combinaciones de esas estimaciones pesimistas, medias y optimistas. Estos cálculos presentan un cuadro de los márgenes extremos de variación de los resultados, pero no indican si el resultado de la hipótesis más pesimista es más o menos probable que el de la más optimista, o si algún valor intermedio es más probable que cualquiera de los extremos. Así pues, aunque este procedimiento constituye un paso adelante en la dirección correcta, no alcanza a presentar un cuadro lo suficientemente claro como para comparar y elegir entre diversos proyectos. Por tanto en los pronósticos a tres niveles es necesario asignar las probabilidades subjetivas de ocurrencia de cada nivel (72).

Entre los diversos parámetros estadísticos tenemos, el máximo, el mínimo, el más probable o moda, la mediana y la media aritmética o valor esperado. Si analizamos cual de ellos es el más adecuado para el cálculo para el cálculo de la tasa de retorno en proyectos de inversión, vemos que el máximo y el mínimo, al utilizar únicamente como criterio de decisión, el optimismo o pesimismo del inversor, no resisten el primer análisis.

La moda, al igual que el máximo y el mínimo toma en cuenta demasiado poco de la información disponible. La mediana ignora la relativa probabilidad de los diversos ingresos y las diferencias en valores.

Por tanto la moda y la mediana son también medidas inaceptables.

Por eliminación nos queda la media que toma en cuenta tanto los diferentes valores como sus posibles diferentes probabilidades de ocurrencia.

La teoría moderna propone procedimientos explícitos de estimación de riesgos, a través de probabilidades específicas que luego se traducen en un riesgo calculado mediante el empleo del valor monetario esperado.

Cuando no hay certeza en el flujo de fondos de una inversión, el empresario puede calcular el valor esperado de todos los posibles flujos de fondos, teniendo en consideración sus respectivas probabilidades.

El valor esperado de una inversión es una medida que indica la tendencia central de todas las probabilidades, pero no nos indica la dispersión.

La media o el valor esperado de las diversas distribuciones probables de ingresos representa la esperanza matemática de los diferentes valores posibles.

Valor esperado puede definirse como

$(x) = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ en la que $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ o sea la suma de todas las probabilidades es igual a la certeza. El valor esperado resulta de sumar los resultados de la multiplicación de cada ingreso por la probabilidad de su ocurrencia. Se citan algunas propiedades básicas de valores esperados.

El valor esperado de un número constante es ese número constante.

El valor esperado de un número constante multiplicado por números variables y su probabilidad de ocurrencia es igual al número cons

tante multiplicado por el valor esperado de los números variables. El valor esperado de la suma de n números variables independientes es simplemente la suma de sus valores esperados.

$$\begin{aligned} E(x+y) &= E(x) + E(y) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i (x_i + y_i) = \left[p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n \right] + \\ &\quad \left[p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots + p_n y_n \right] \\ &= \sum_{i=1}^n p_i x_i + \sum_{i=1}^n p_i y_i \end{aligned}$$

El valor esperado de una constante por variables más otra constante es igual a la primera constante multiplicada por el valor esperado de las variables más la segunda constante.

$$E(bx + c) = bE(x) + c$$

Luego que el analista económico completa su tarea de investigación de las variables, solamente necesita transformar sus estimaciones y asignar probabilidades a cada una de ellas.

El analista habrá considerado la situación de la firma en la industria, la posibilidad de productos obsoletos, la agresividad de sus competidores, la productividad, la investigación y el desarrollo de la firma, su conducción y equipo gerencial, las condiciones macroeconómicas vigentes (12).

Solamente un evento puede ocurrir y si el pronosticador lo conociera él fácilmente podría elegir el curso de acción mejor o si lo deseara, tomar el curso más probable; pero ninguno de estos dos cursos de acción son guías de acción disponibles o deseables. Deben considerarse los restantes eventos además del que tiene la mayor probabilidad de ocurrencia.

Si se desea obtener las mayores utilidades posibles, lógicamente se debe elegir el acto que tiene el más alto promedio ponderado de sus posibles consecuencias monetarias. Esto es llamado "maximizar el valor monetario esperado".

Si por ejemplo valuamos el acto de hacer perforación de un pozo petrolero y tenemos los siguientes posibles eventos con sus respectivas probabilidades de ocurrencia y valores monetarios resultantes de cada evento.

<u>Eventos posibles</u>	<u>Probabilidades</u>	<u>Consecuencias Monetarias del acto</u>	<u>Valor Monetario Esperado</u>
		\$	\$
Pozo vacío	.60	-50.000	-30.000
50.000 barriles	.10	-20.000	- 2.000
100.000 barriles	.15	30.000	4.500
500.000 barriles	.10	430.000	43.000
1.000.000 barriles	.05	930.000	46.500
			<hr/>
			62.000
			<hr/>

Comparado con otros actos, si éste tiene el mayor valor monetario esperado, sería el mejor acto para ser elegido. Pero ello no significa que se obtendrán \$62.000. Si se elige este acto, sólo uno de los posibles eventos ocurrirá. Pero como no es conocido cual de ellos ocurrirá, es lógico ponderar cada uno de los posibles eventos por su probabilidad de ocurrencia (13).

Para determinar la distribución de probabilidades del valor actual es necesario conocer la distribución de probabilidades de cada flujo de fondos individual o al menos las medias y varianzas respectivas. En la práctica esto puede resultar fuera de la realidad. El procedimiento sugerido por Hillier es hacer para cada flujo de fondos una estimación optimista, otra pesimista y una tercera en base a la más probable.

Se supone que estas estimaciones corresponden al extremo inferior, al superior y a la moda respectivamente de la distribución de probabilidades. Se supone también que el modelo asume la forma de una distribución "Beta" en la cual la desviación estandar es $1/6$ del espacio entre el límite inferior y el superior.

La distribución "Beta" se parece a la normal salvo que tiene límites en los extremos, en vez de los extremos $\pm \infty$ de la distribución normal y además no necesita ser simétrica, puede ser inclinada apropiadamente si la moda no está a mitad de camino entre ambos extremos y puede ubicarse entre la estimación optimista y la pesimista conforme al criterio del analista. Sin embargo si ubica el valor más probable equidistante de los valores extremos la distribución resultante es aproximadamente la normal y sus extremos $\mu \pm 3 \sigma$.

La estimación optimista y pesimista debe ser interpretada como la interpretación de los valores máximos y mínimos que pueden ocurrir razonablemente y no debe interpretarse como una estimación optimista/pesimista del valor más probable.

En el supuesto que cada flujo de fondos tenga una distribución "Beta" con 6 desviaciones estandar entre los extremos, la media y la varianza son funciones explícitas de los extremos y la moda, esas funciones son dadas por Malcolm citado por Hillier.(16)

$$\text{Est} \left\{ E(W) \right\} = 1/3 \left[2 \text{Est}_m (W) + 1/2 \text{Est}_p (W) + 1/2 \text{Est}_o(W) \right]$$

en donde $\text{Est}_o (W)$ es la estimación pesimista y $\text{Est}_p (W)$ la pesimista y $\text{Est}_m (W)$ la estimación más probable. $\text{Est} \left\{ E(W) \right\}$ la media y $\text{Est} \left\{ \text{var}(W) \right\}$ es la estimación de la varianza = $\left[1/6 ((\text{Est}_o(W) - \text{Est}_p (W))) \right]^2$

En el caso discreto tomamos el valor esperado multiplicando los distintos valores por su probabilidad de ocurrencia. Cuando los flujos de fondos son continuos con una distribución normal, se puede obtener el valor esperado aproximado y buscar un valor k para el que la probabilidad de exceder $u + k$ sea .25 y por la simetría de la distribución nor-

mal la probabilidad que los flujos sean menores de $u - k$ también será .25. Si tenemos un proyecto con una inversión de \$12.000, un valor esperado neto de \$5.000 en los próximos 3 períodos con probabilidades independientes de una distribución normal, donde la probabilidad de que el ingreso exceda \$5.500 es de .25 con tasa de descuento del 10%.

$$\text{Tenemos } -12.000 + \frac{5.000}{1,1} + \frac{5.000}{1,1^2} + \frac{5.000}{1,1^3} = 434$$

Sabemos que una probabilidad de .25 corresponde en una distribución normal a $2/3\sigma$ de donde $2/3\sigma = 500$ $\sigma = .750$

Como sabemos que la varianza de la suma de un conjunto de flujos de fondos independientes es la suma de riesgo de varianzas individuales.

$$\sigma_s^2 = a_1^2 \sigma_1^2 + a_2^2 \sigma_2^2 + \dots + a_n^2 \sigma_n^2$$

En nuestro ejemplo como \$-12.000 es una constante su varianza es 0. $\sigma_0^2 = 0$ $\sigma_1^2 = 750^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$

la varianza sobre el valor actual neto es =

$$\sigma^2 = 0 + \frac{750^2}{1,1^2} + \frac{750^2}{1,1^4} + \frac{750^2}{1,1^6} = 1.167.003$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \cong 1.080$$

Si nosotros buscamos la probabilidad que el valor actual neto sea menor de 0 obtendremos una desviación de -434 y expresada en términos de desviación estandar $\frac{-434}{1.080} = -0,402$ y la probabilidad correspondiente es de aproximadamente 0,34. (3)

Si existen m propuestas, el analista debe identificar las distintas fuentes de los flujos de fondos y sus variables exógenas relevantes. No debe olvidarse que la apertura de los flujos de fondos es un medio pero no un fin en sí mismo.

Su propósito es lograr dividir la compleja tarea de estimar los flujos de fondos totales en flujos más manejables y menos complejos para aumentar la seguridad y eficiencia del proceso de estimación. Hay sin embargo un punto en el cual las ventajas de discriminar más, no justifican el mayor empleo de tiempo que requiere.

Debe buscarse un balanceo entre la seguridad de la solución y el esfuerzo requerido para obtenerla. Así debe también considerarse que no resulta práctico extender los flujos de fondos indefinidamente en el tiempo, por cuanto llevados a valor actual los flujos de fondos distantes no contribuyen significativamente a cambiar el valor actual.

El cálculo del valor esperado retomando los ingresos que pueden resultar del promedio ponderado de todos los eventos de una decisión, son suficientemente precisos en el caso de que el proyecto sea lo suficientemente pequeño con relación a los recursos totales del empresario, de modo que no le afecte en su discernimiento el riesgo de tener que soportar una pérdida de determinada magnitud.

El empresario estará completamente satisfecho con el uso del valor esperado si, por este medio, se asegura decisiones en condiciones de incertidumbre que sean consistentes, transitivas y divisibles en eventos sencillos.

El valor monetario esperado es aplicado hasta arribar a un punto en que, a pesar de que el valor monetario esperado tiene un valor aceptable, a la expectativa de perder una determinada cantidad de dinero, se le asigna una importancia mayor que el resultante de multiplicar la pérdida posible por su probabilidad de ocurrencia. Es el punto en que aflora la actitud frente al riesgo y donde la mayoría de los empresarios adoptan una actitud de aversión al riesgo.

El cálculo del Valor Monetario Esperado es un método de obtener un valor único de una distribución de múltiples posibles eventos.

Además el Valor Monetario Esperado ignora la actitud ante el riesgo del tomador de decisiones.

Sin embargo el uso de probabilidad como guía de decisión para firmas con limitados recursos, tiene el peligro que se arruinen financieramente antes que se realice el "promedio". Maximizar el valor monetario esperado puede no ser una guía de decisión útil, cuando las consecuencias de ciertos actos no puedan describirse adecuadamente en términos monetarios. En general se puede decir que es una guía de decisión útil en aquellos casos que sus consecuencias monetarias no son muy importantes en comparación con los recursos de la empresa.

Se le objeta al valor esperado que no permite la diversificación, o sea la distribución de los fondos a invertir en más de una inversión, para obtener cierta compensación entre los retornos y su dispersión.

El uso del valor esperado se basa en la ley de los grandes números de Bernouilli, por la cual el valor esperado se acerca, a la larga, a un valor de cuasi-certeza, aunque se objeta que en la actividad económica casi nunca se cumple el requerimiento de repeticiones sucesivas e independientes. Se le critica a este criterio, la falta de consideración de los valores extremos.

3.3 Análisis de Probabilidades

La existencia del hombre sería penosa si conociera con certeza la consecuencia de todos los actos.

Las respuestas que se pueden obtener cuando se pregunta el valor que puede asumir una variable, expresan distintos grados de confianza del futuro y van desde la confesión de no poder asignar un valor a una variable, a la manifestación de que la variable tiene un valor esperado x , una desviación estandar z y una distribución normal.

Este último enunciado es el que nos permite su incorporación en un encuadre matemático para la toma de decisiones dentro de la teoría de las probabilidades.

Savage citado por Byrne considera a las probabilidades como el grado de confianza que un individuo tiene en la realidad de una proposición particular y distingue tres enfoques acerca de probabilidades: el objetivo, el determinista y el subjetivo.

El enfoque objetivo, acepta el principio de indiferencia o razón insuficiente que establece que los eventos deberían ser referidos como equiprobables a menos que existan razones para sostener lo contrario, de donde llegamos a que la probabilidad es la relación entre el número de casos favorables en relación al número total de casos igualmente posibles. Savage ha enunciado la posición objetiva diciendo que ciertos eventos repetitivos, como arrojar una moneda, prueban estar en estrecha relación con el concepto matemático de eventos casuales independientemente repetidos. De acuerdo a ella, la evidencia del comportamiento de eventos repetitivos y su concepto matemático de la magnitud de las probabilidades, debe ser únicamente obtenida por la observación de repeticiones del evento.

El criterio objetivo afirma que la probabilidad es una propiedad objetiva de aquellos sistemas físicos que son susceptibles de re-

petición. De donde eventos individuales no pueden ser definidos probabilísticamente, no hay lugar dentro del marco de la opinión objetivista para la existencia de diferencias personales.

Muy pocas situaciones en la actividad económica son claramente repetitivas, más bien la gran mayoría de las situaciones son únicas o poco repetidas. Resulta también obvio que las diferencias personales juegan un rol importante en la toma de decisiones. Por ello, no podemos considerar a las probabilidades objetivas como herramienta eficaz para la toma de decisiones.

El criterio determinista, representado entre otros por Edgeworth y Keynes, establece que la probabilidad es una medida del grado de creencia en que una proposición está derivada lógicamente de otra. Es subjetivo solamente en el sentido de la elección individual y es necesario relacionar la proposición a cierto cuerpo de conocimiento, más allá de esto es objetivo y lógico. Los deterministas concluyen que los hombres racionales no disienten salvo en la elección de premisas.

Hacen mayor énfasis en el rol de la lógica deductiva en contraste con la posición objetivista que enfatiza la lógica inductiva. Los deterministas no excluyen la lógica inductiva, fijan su rol como el de ayudar a la formación de premisas a ser usadas en el contexto deductivo. Ramsey hace notar que las relaciones de probabilidad que miden los grados de creencia entre proposiciones, no parecen ser perceptibles aún en los casos lógicamente más simples.

La crítica más usual a la posición determinista es la de que cuando dos individuos posean exactamente la misma información, ellos arribarán al mismo criterio sobre probabilidad. Este requisito hace impracticable su uso en la teoría de la decisión.

El punto de vista subjetivo define a la probabilidad como la medida del grado de confianza que un individuo particular tiene en la veracidad de una proposición específica.

Savage afirma que un simple ordenamiento aplicado a eventos es una probabilidad cualitativa que tiene el mismo equivalente numérico que tienen las propiedades matemáticas atribuidas a las probabilidades. Estas probabilidades admiten que sean reconocidas y aceptadas diferencias personales entre individuos o sea que no se requiere que dos individuos con parecida experiencia e igual información tenga iguales estimaciones de probabilidades acerca de un evento. Este criterio es consistente con la teoría de decisión.

Cuando un individuo explicita sus pensamientos acerca de estados de naturaleza, éstos pueden ser llevados a valores numéricos que obedecen a las leyes matemáticas de la probabilidad (6).

Las probabilidades personales son guías útiles para la acción consistente frente al riesgo, por cuanto permiten al individuo incorporar toda su experiencia, información y discernimiento.

Las probabilidades personales se determinan sólo por el individuo al auto-preguntarse acerca del evento. No son manifestaciones de frecuencias relativas de lo que podría ocurrir en un número repetido de intentos. Ellas son resultantes del grado de creencia en un resultado particular de manera que puede ser usado por el individuo como guía de acción. El evento hipotético no establece las probabilidades, el individuo lo hace.

Las teorías de decisión son medios de apresar y utilizar el discernimiento más efectivamente, no son métodos para reemplazarlo.

La ventaja de usar la teoría de la decisión es que los problemas se dividen en partes componentes de los mismos. Cada parte es atacada separadamente por especialistas con información, habilidad y experiencia, cuyo discernimiento puede ser empleado al máximo, y finalmente cada parte es unificada nuevamente, por la metodología de la decisión estadística.

Si decimos que las ventas de un producto no serán en los próximos dos años inferiores al nivel actual, es imposible constatar la validez de esta afirmación sin esperar dos años y constatar si realmente las ventas no resultaron inferiores al nivel actual. Sin embargo en la vida real muy a menudo nos vemos obligados a elegir entre muchas posibilidades asumiendo afirmaciones de igual naturaleza que la expuesta, analizando la evidencia objetiva disponible para un hombre razonable.

Se entiende que un hombre es razonable o racional cuando sus preferencias se ven apropiadamente afectadas por nuevas evidencias de relevancia.

Supongamos que está disponible la evidencia objetiva E y un hombre razonable dice que dado E la hipótesis H , es la más probable de ser verdad. Ello implica que hay otras hipótesis, $H_2 \dots H_n$ que son menos probables, las probabilidades relativas asignadas a estas diversas hipótesis se denominan probabilidades subjetivas y en tanto y en cuanto se ajusten a ciertas reglas, no se distinguen de las probabilidades objetivas.

Lo que debe puntualizarse es que la experiencia pasada es útil solo como una guía y a menos que algunos supuestos limitativos sean hechos -como que el futuro no tendrá diferencias significativas con el pasado- la evidencia representada por probabilidades objetivas es sólo parcialmente una evidencia válida. La asignación de probabilidades subjetivas está basada en parte en evidencia explícita, como la representada por probabilidades objetivas y en parte en el uso de juicios intuitivos de personas experimentadas. Las probabilidades objetivas representan solamente una parte de la información expresada por las probabilidades subjetivas.

Cuando nos alejamos del laboratorio o del casino las probabilidades objetivas parecen desaparecer. Tal el caso por ejemplo de una elección presidencial, cuando se establece A tiene una probabilidad de .4 de ser electo presidente. No podemos repetir la elección tantas veces co

mo sea necesario para verificar que el número de veces en que A es electo se acerca a la fracción $4/10$. El hecho que no podamos comprobarlo empíricamente, no invalida la afirmación pero ella es cualitativamente diferente de aquellos enunciados con probabilidades objetivas. La diferencia esencial consiste en que las personas de criterio probado, teniendo a su disposición la misma información pueden determinar probabilidades bastante diferentes.

Así un individuo que tiene preferencias consistentes sobre un conjunto específico de estrategias actuará como si asignara probabilidades a los distintos eventos.

Supongamos que si un individuo apoya a A en su campaña electoral y tiene como resultado el cambio en su remuneración anual según sea A electo o derrotado. Si no participa en la campaña mantiene su ingreso actual,

	W_1 A electo	W_2 A derrotado
S_1 = si apoya a A en su campaña	\$ 20.000 anuales	\$ 10.000 anuales
S_2 = no participa en la campaña	\$ 15.000 "	\$ 15.000 "

W_1 y W_2 son estados de naturaleza que serán el resultado luego que se haya hecho el recuento de votos.

Si se pudieran obtener probabilidades objetivas, el individuo elegiría la estrategia que maximizara su ingreso. Pero como se trata de una elección con muchas incertidumbres (descalificación de candidatos por circunstancias hechas públicas antes de la elección, declaraciones imprudentes de un candidato que pueden hacerle perder votos, una guerra puede cambiar el resultado de la elección).

Si el individuo que elige entre S_1 y S_2 tiene preferencias consistentes diferentes sobre un número de alternativas, puede realizar su elección como si hubiera asignado una probabilidad numérica (probabilidad subjetiva) de que A sea electo y actuará con esta probabilidad de

maximizar su utilidad exactamente como un individuo que estuviera manipulando probabilidades objetivas (20).

En nuestro ejemplo $C_1 = 20.000$ al año $C_2 = 15.000$ y $C_3 = 10.000$ hay dos estados de naturaleza posibles $W_1 = A$ electo y $W_2 = A$ derrotado. Si asignamos a W_1 una probabilidad de .60 y W_2 .40,

$$C_1 \cdot W_1 + C_3 \cdot W_2 = .60 \times 20.000 + .40 \times 10.000 \\ = 16.000 \text{ que es mayor que}$$

$$C_2 = 15.000 \text{ si eligiera } S_2$$

En el criterio objetivo es requerido un número de observaciones antes que pueda ser asignada una probabilidad. La aceptación del criterio determinista requiere por su parte información que, conforme a la opinión generalizada, no puede llegar a ser obtenida. Si se adopta el criterio subjetivista la diferencia entre riesgo e incertidumbre no es completamente relevante, no debe olvidarse que en las diversas situaciones de la vida económica no ocurre que se conozca o desconozca totalmente la distribución del ingreso de un grupo de alternativas por cuanto, usualmente, hay información disponible aunque ella sea incompleta.

Para obtener probabilidades subjetivas de un evento, debe presentársele al individuo una serie de alternativas entre las cuales debe elegir.

La lotería estandar de Schlaifer y el método del juego de Savage son exponentes importantes de las técnicas de interrogación sobre comportamientos.

Siguiendo el procedimiento de Savage, si el resultado de una campaña publicitaria es descripta por dos términos: efectiva e ineficaz, para encontrar la probabilidad subjetiva de un individuo para estos dos resultados, se le presenta al individuo el juego real de recibir \$0.- si el programa de publicidad no es eficiente o recibir \$10.- si resulta eficiente y, al mismo tiempo, el juego hipotético de una caja que contiene

4 bolas rojas y 6 bolas negras; extrayendo una bola negra se reciben \$10.- y si la bola extraída es roja \$0.- Se le indica al individuo que selecciones entre uno y otro juego, cambiando las proporciones de las bolas rojas y negras hasta que el individuo exprese indiferencia entre ambos juegos, con lo que quedan determinadas sus probabilidades subjetivas. Si se considera que es deseable medir los pensamientos individuales acerca de la ocurrencia de un evento, la posición subjetiva es la preferida.

Téngase en cuenta que a diferencia de la probabilidad objetiva que para ser usada en un proceso, éste debe ser repetitivo, cuando el criterio subjetivista es adoptado se reduce la información requerida (6).

Grayson afirma también que para facilitar la asignación de probabilidades debe llevarse el problema a enfrentar una apuesta a favor de un evento real, con otra apuesta a favor de un juego de azar con probabilidades objetivas conocidas hasta alcanzar el punto de indiferencia entre ambas apuestas, de modo que el pronosticador percibe que las probabilidades de jugar en la vida real, son prácticamente las mismas que las de la apuesta en el juego de azar.

	Juego en el mundo real		<u>Juego hipotético</u>	
	<u>Opción a perforar un pozo petrolife ro</u>			
	\$	\$	\$	\$
Consecuencia:	0	10	0	10
Evento: Pozo	Seco	Productivo	Negro	Rojo
Probabilidad	?	?	.80	.20

Si el punto de indiferencia se logra cuando las probabilidades objetivas son .60 negro .40 rojo. Entonces se asimila que las probabilidades a las que se adhiere al jugar en el mundo real son también .60 y .40.

Este procedimiento no debe considerarse más allá de una técnica para apoyar y ayudar al pronosticador a expresar numéricamente sus convicciones sobre el evento.

Otro camino sugerido es que el pronosticador seleccione de entre la variedad de distribuciones más conocidas, la que más se adapta a su forma de interpretar los hechos de la vida real. Así la mayoría elegirá la distribución normal, mientras otros optarán por la Poisson, beta, gamma con distintos valores de r ; el empleo de estas distribuciones facilita enormemente el posterior análisis por cuanto sus características analíticas son bien conocidas.

En la asignación de probabilidades no es cuestión de encontrar las verdaderas distribuciones de probabilidades de las variables, sino de determinar para cada variable la distribución que mejor traduzca el criterio del analista. La distribución correspondiente a un criterio no muy preciso puede ser tan apropiada como la correspondiente a un criterio detallado.

Mediante el uso de probabilidades subjetivas las estimaciones de incertidumbre pueden ser hechas de conformidad a una forma explícita, estas probabilidades son el resultado de que en los negocios y en la vida real, las probabilidades son subjetivas, no se dan probabilidades que pueda afirmarse que son verdaderamente objetivas.

Lo que debe tratarse al asignar probabilidades subjetivas es estar en posesión de la mayor cantidad de elementos objetivos de juicio para ser considerados, usando incluso la inferencia estadística. Debe superarse sin embargo la resistencia que, por apego a la concepción tradicional de probabilidades, oponen los empresarios a traducir sus pensamientos sobre determinados eventos en probabilidades. Será útil entonces la existencia de series estadísticas que nos muestren, entre otras, frecuencias, tendencias, correlaciones, medias y distribuciones (40).

Además para el propósito de decisiones, todas las probabilidades son en última instancia subjetivas, por tanto es irrelevante si las probabilidades disponibles son objetivas o subjetivas.

Debe evitarse el peligro de considerar que los números están dotados de tales facultades que los hacen infalibles. Al expresar en números la opinión sobre un evento no pasan a ser objetivos, son solamente la expresión simbólica de ideas. Es un lenguaje más entre muchos existentes, si bien más preciso que las palabras. No debe olvidarse esto para evitar conferirles demasiado significado.

3.4 Desviación estandar y varianza

Si consideramos la distribución de probabilidades de los ingresos de un proyecto vemos que una forma de expresar el riesgo sería decir: Un ingreso más probable de \$5.000.-, con límites de ingresos posibles que varían entre \$3.000.- y \$7.000.-

Al fijar los límites se usan solamente las magnitudes y lo que se desea es considerar las magnitudes de cada evento y sus probabilidades de ocurrencia.

La medida más aceptada es la desviación estandar, por cuanto conforma la noción usual del riesgo, como la dispersión de ingresos alrededor del valor esperado. Los términos matemáticos varianza y desviación estandar miden la dispersión de flujos de fondos de su valor esperado.

La varianza $Var = \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^n P_i (x_i - E(x))^2$ es la suma de los productos de los cuadrados de las desviaciones multiplicadas por sus probabilidades de ocurrencia.

La desviación estandar es simplemente la raíz cuadrada de la varianza

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2}$$

Si dos combinaciones tienen el mismo Valor Actual Neto esperado, se elige la combinación con la varianza más baja, por cuanto esto implica elegir la dispersión menor.

Si tenemos una combinación con Valor Actual Neto Esperado de \$100.000.- y una varianza de $(\$5.000.-)^2$ y otra combinación con igual Valor Actual Neto Esperado y una varianza de $(\$7.000.-)^2$. El teorema de Chebyshev nos dice que la probabilidad es $q, q \geq .89$.

a) el Valor Actual Neto de la primera combinación será de:

$$\begin{array}{l} \$100.000 \quad + \quad 3(\$5.000.-) \text{ o sea,} \\ \$ 85.000 \quad \text{a} \quad \$115.000.- \end{array}$$

- b) el Valor Actual Neto de la segunda combinación será de
 $\$100.000 \pm 3(\$7.000.-)$ o sea
 $\$ 79.000$ a $\$121.000.-$

La primera combinación será preferida por tener menor varianza, lo que asegura mayor estabilidad en el retorno (91).

En la teoría la decisión se usa el concepto de varianza para medir la falta de información o sea que varianza es supuesta como proporcional ignorancia.

La gran importancia de la varianza como medida de dispersión es su propiedad aditiva que no posee ninguna otra medida de dispersión. La varianza de una suma de variables independientes es la suma de sus varianzas individuales:

$$\sigma^2 (x + y + z + \dots) = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + \dots$$

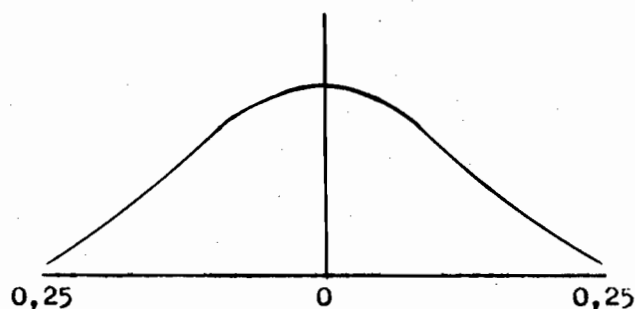
Se puede entonces buscar maximizar el Valor Actual Neto sujeto a la restricción que la probabilidad de un Valor Actual Neto, sea igual o menor que -Por ej.: 0,1. El conocimiento de la varianza de cada proyecto nos permite establecer este tipo de restricción.

La desviación estandar es particularmente buena como medida de variación, si la distribución de frecuencias es una distribución normal.

Si realmente no tenemos muchos valores de la distribución de frecuencias, se supone que si tuviéramos más valores la curva sería cada vez más cercana a una curva normal.

La forma de una curva normal es perfectamente determinada por la media aritmética y la desviación estandar de la distribución.

Una desviación estandar o varianza grande determina una curva achatada.

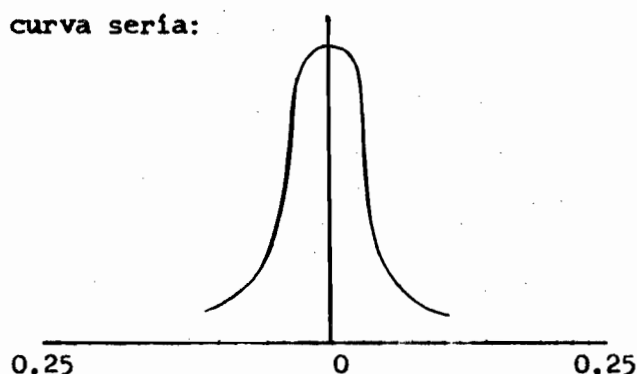


Media = 0

Varianza = .10

Desviación estandar = 316

Si la desviación estandar es relativamente pequeña el formato de la curva sería:



Media = 0

Varianza = .001

Desviación estandar = .0316

En una distribución normal el 68,25% ($2/3$ aproximadamente) cae dentro de $\mu \pm 1\sigma$ o sea una desviación estandar a ambos lados de la media, 95,45% dentro de $\mu \pm 2\sigma$ y 99,73% dentro de $\mu \pm 3\sigma$.

También se usa la desviación absoluta de la media, en la que se suman todas las desviaciones de la media -tanto las negativas como las positivas- sin tener en cuenta su signo, dividiéndose por el número de sumandos.

Si tuviéramos en cuenta el signo, por definición, su suma algebraica sería cero.

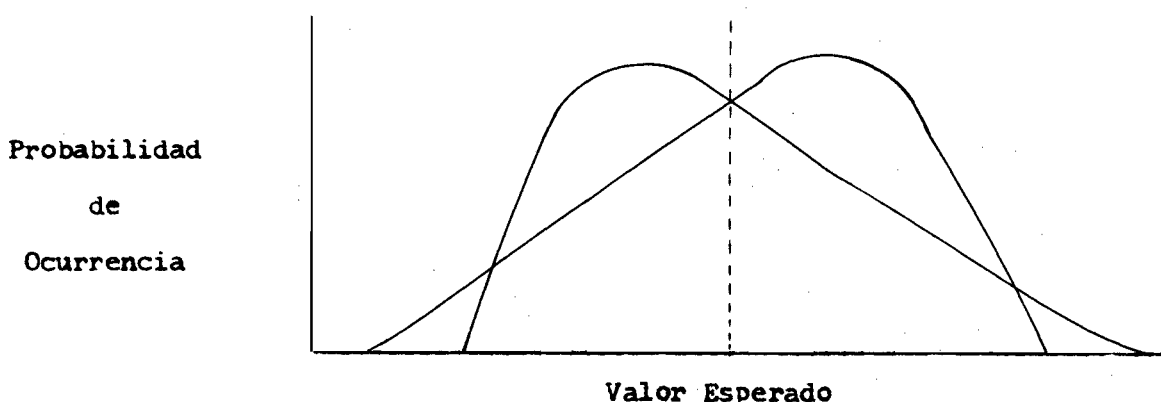
La mayor ventaja del criterio matemático es que los cálculos de la media y la varianza o desviación estandar pueden ser rápidamente hechos para proyectos relativamente simples, cuando se necesita o solamente es factible una estimación no muy precisa de los retornos del proyecto, basada en pocas variables cruciales. El método es también útil para derivar generalizaciones acerca de la sensibilidad de estimaciones de diversos eventos elementales.

La utilización de la desviación estandar permite calcular el grado de probabilidad que los resultados sean menores que un valor dado considerado crítico por el inversor. Consideremos en el ejemplo que el inversor no desea incurrir en pérdidas; en ese supuesto dividimos el valor esperado por la desviación estandar y conocemos que el resultado de la inversión es 0, en caso que el VE sea p.ej. 0.6425σ y por las tablas de distribución normal encontramos que la probabilidad correspondientes es 0.26; para una desviación igual a σ , sabemos que la probabilidad que los valores estén entre más una desviación estandar y menos una desviación estandar es de 0.683 y, consecuentemente, la probabilidad de valores a la izquierda de $-\sigma$ es de $(1-0,683)/2 = 0,327/2 = 0,163$.

Evidentemente, no es la dispersión lo que hace riesgosa una inversión, sino la posibilidad de que como consecuencia de esa dispersión se obtengan desviaciones por debajo del valor esperado y éstas lleguen a límites no aceptables por el inversor.

Así nos podemos encontrar con dos curvas simétricas que tengan valores esperados iguales e iguales desviaciones estandar.

Reviste singular importancia para establecer un grado de preferencia entre ellas, su forma y el lado de su inclinación.



La curva A inclinada hacia la derecha mientras la distribución de B es inclinada hacia la izquierda. Es evidentemente preferida la inclinación hacia la derecha que muestra menor desviación para valores menores que el valor esperado y la mejor posibilidad de alcanzar mayores valores.

Lo expuesto viene a probar que la desviación estandar no es una medida totalmente segura para medir el riesgo (50). La desviación estandar es una medida de confianza en la media, más que una medida de riesgo de pérdidas.

3.5. Semivarianza - Media Geométrica

3.5.1 Semivarianza

En realidad lo que le preocupa al inversor es distinguir las desviaciones por debajo de la media que son las que involucran un verdadero riesgo para él. La varianza del Valor Actual Neto no logra detectar adecuadamente este aspecto esencial del riesgo en inversiones.

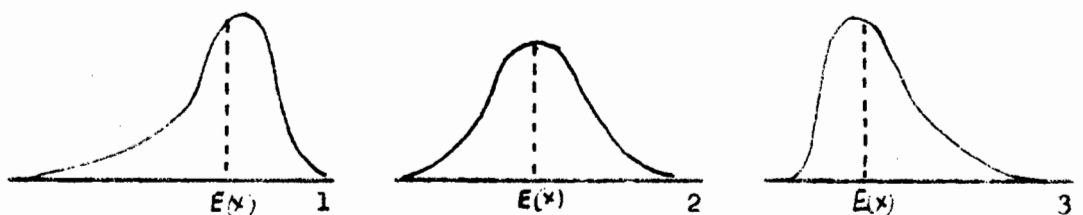
Se sugiere el uso de la semivarianza como una medida superior de riesgo en comparación con la varianza. Dentro de la distribución de probabilidades el área situada a la izquierda de $E(r)$ represente para el inversor la probabilidad de pérdidas o perjuicios, es decir el riesgo. La semivarianza de las tasas de retorno es una medida del área por debajo de $E(r)$ en la distribución probable de las tasas de retorno.

$$SV_r = \sum_{i=1}^n P_i \left[TR(r) - E(r) \right]^2$$

donde $TR(r)$ es la tasa de retorno por debajo de $E(r)$

La raíz cuadrada de SV_r es llamada la semidesviación de los retornos. Tanto la semivarianza como la semidesviación son casos especiales de la varianza y la desviación estandar de los retornos.

Distribución simétrica de los retornos probables



Consideremos las figuras 1, 2 y 3 que nos muestran tres diferentes tipos de inclinación en la distribución probable de retornos. Si la distribución es simétrica como se observa en la figura 2, en vez de ser inclinada a la izquierda o a la derecha, un análisis basado en el valor esperado y su desviación estandar es superior en razón de: costo, conveniencia y familiaridad y produce los mismos resultados que la semivarianza si la distribución es simétrica.

La semivarianza de los flujos de fondos es el promedio ponderado de las semivarianzas de cada período particular.

Tomemos F_t como el flujo de fondos de una inversión al fin del período t y E_t el valor central con el cual es comparado el flujo real de fondos.

Y tomamos $(F_t - E_t^*)$ cuando $(X_t - E_t) \leq 0$ y en caso $(F_t - E_t) > 0$ tomamos 0 como valor de $(F_t - E_t)$

La semivarianza de $F_t = SV = E(F_t - E_t^*)^2$

La varianza de todo el proyecto

$$SV = \sum_{t=0}^n b_t s_t \text{ en la que } b_t > 0 \text{ y } \sum b_t = 1$$

AÑO	Conjunto de inversiones A			Conjunto de inversiones B			Flujo de fondos de la firma fijado como objetivo
	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	
Probabilidades ...	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	1/3	
1	185	200	215	125	140	155	150
2	385	400	415	165	180	195	200
3	185	200	215	215	230	245	230
4	-15	0	15	245	260	275	265
5	185	200	215	245	260	275	280

Aplicando la fórmula $SV = E(F_t - E_t^*)^2$ tenemos:

Para A: $S1 = 0$ $S2 = 0$ $S3 = 1050(*)$ $S4 = 70375$ $S5 = 6550$ y,

Para B: $S1 = 242$ $S2 = 550$ $S3 = 75$ $S4 = 142$ $S5 = 550$

$$\begin{aligned}
 (*) \quad (S3A &= 1/3 (185 - 230)^2 \\
 &+ 1/3 (200 - 230)^2 + 1/3 (265 - 230)^2 \\
 &= (2025 + 900 + 225)/3 = 1050
 \end{aligned}$$

Suponiendo que estas semivarianzas de cada período tengan igual peso ponderado la semivarianza total resulta:

$$\begin{aligned}
 SV_A &= \sum_{t=1}^n b_t S_t = 1/5 (0) + 1/5 (0) + 1/5 (1050) + 1/5 (70375) + \\
 &1/5 (6550) = \\
 &= 15.595
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 SV_B &= 1/5 (242) + 1/5 (550) + 1/5 (75) + 1/5 (142) + \\
 &1/5 (550) \\
 &= 312
 \end{aligned}$$

Siguiendo el criterio media-varianza M/V , los conjuntos de inversiones A y B son igualmente riesgosos; con el criterio E-SV de Mao, A se muestra más riesgoso. Esto es lógico por cuanto no obstante tener A y B la misma varianza, la de A en cada período se mide en torno a la media del flujo de fondos, cuyos valores esperados revelan un alto grado de inestabilidad en el tiempo. En cuanto a las varianzas de B en cada período, son calculadas en torno a medias que tienen un crecimiento continuado en el tiempo. (85)

Dado que el flujo de utilidades que constituye el objetivo de la firma muestra un deseo de crecimiento firme, B resulta una inversión menos riesgosa que A y el criterio de SV es consistente con este concepto de riesgo mientras que la varianza tradicional no lo es.

Para describir el modelo E-SV suponemos que entre n proyectos un inversor puede elegir cualquier combinación de proyectos. El flujo de fondos del proyecto i en el período t es representado por F_{it} . Dadas F_{it} es posible calcular el Valor Actual Neto y las semivarianzas totales correspondientes a cada proyecto o a cualquier combinación de proyectos.

Usando 1 y 0 para indicar aceptación o rechazo de un proyecto, entonces un conjunto de proyectos puede ser representado por un vector en el cual el valor d_j indica si el proyecto j es aceptado o rechazado. Como hay n proyectos la combinación de proyectos tiene un máximo de 2^n . Sin embargo se puede reducir el número de combinaciones factibles introduciendo restricciones resultantes de recursos humanos disponibles, complementariedad o mutua exclusión entre ciertos proyectos. Con esta formulación deben generarse los conjuntos de proyectos E-SV eficientes.

Para su implementación debemos considerar que si hay n proyectos y los períodos de tiempo son m hay un total de nm variables y sus distribuciones de probabilidades conjuntas constituyen los datos básicos para el análisis. Estas nm variables se pueden combinar en una matriz en la que las filas se refieren a los proyectos y las columnas al tiempo.

$$\begin{pmatrix} F_{11}, & F_{12} & \dots & F_{1m} \\ F_{21}, & F_{22} & \dots & F_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ F_{n1}, & F_{n2} & \dots & F_{nm} \end{pmatrix}$$

Si cada una de esas variables toma un número finito de valores posibles, se enumeran todas las posibles matrices, especificando sus probabilidades de realización p_j para $j = 1, 2 \dots j$.

Puede que si los valores de n , m y j , sean grandes no sea fácil especificar las probabilidades conjuntas.

Si tomamos la computación de μ_t y SV_t de un conjunto de proyectos $(d_1, d_2 \dots d_n)$ tenemos:

En la primer columna, cada fila de números establece para una combinación posible de flujo de fondos en el período t .

La fila j es idéntica a la columna t de la matriz j de los flujos de fondos.

La tabla muestra solamente las etapas de cálculo del valor esperado y la semivarianza en el período t.

Distribución de Probabilidades	Ingreso x Probabilidad	Cuadrado de las desviaciones negativas por probabilidad
$x_{1t}^1, x_{2t}^1 \dots x_{nt}^1; p_1$	$(\sum_{i=1}^n d_i x_{it}^1) p_1$	$((\sum_{i=1}^n d_i x_{it}^1 - E)^2) P_1$
$x_{1t}^2, x_{2t}^2 \dots x_{nt}^2; p_2$	$(\sum_{i=1}^n d_i x_{it}^2) p_2$	$((\sum_{i=1}^n d_i x_{it}^2 - E)^2) P_2$

$x_{1t}^j, x_{2t}^j \dots x_{nt}^j; p_j$	$(\sum_{i=1}^n d_i x_{it}^j) p_j$	$((\sum_{i=1}^n d_i x_{it}^j - E)^2) P_j$
$\mu_t (d)$		$SV_t (d)$

Mao da un ejemplo de aplicación del procedimiento de computación. Se trata de un conjunto formado por dos proyectos C y D ambos con una vida económica de 2 años con los flujos de fondos siguientes:

\bar{F}_{11}	\bar{F}_{21}	\bar{F}_{12}	\bar{F}_{22}	Probabilidades Conjuntas
-100	-200	+400	+300	.1
-100	+200	+400	-400	.1
-100	+400	+100	+600	.1
+50	-200	+100	+300	.1
+50	+200	-200	+600	.1
+50	+400	-200	+300	.1
+200	-200	-200	-400	.1
+200	-200	+100	-400	.1
+200	+200	+400	-400	.1
+200	+400	+100	+300	.1

Si $i=0,10$ $E_1 = 99$ $E_2 = 108$ y $b_1 = b_2 = 1/2$ los valores buscados son $E=299$ y $SV 46590$. (85).

3.5.2. Media Geométrica

Hirschlaifer sugiere que la media aritmética y la desviación

estandar no son los parámetros estadísticos relevantes a ser considerados en la selección de inversiones sujetas a riesgo y que tal como lo propone H.A. Latané, el promedio geométrico debería servir como criterio de elección (17).

Supongamos una inversión con los siguientes retornos:

Año	1	2	3	4	5	6	7	8	Promedio
Retorno	.15	-.05	.20	.00	-.05	.05	.00	.10	.05

o sea, \$1.- invertido al comenzar el año 1 pasa a ser \$1,15 al finalizar el año 1 y $(1,15)(0,95) = 1,09$ al finalizar el año 2. Al finalizar el año 8 tendría el siguiente valor $(1.15)(0.95)(1.20)(1.00)(0.95)(1.05)(1.00)(1.10) = 1.44$

Si tomamos el promedio 0.05 en ocho años $(1.05)^8 = 1.48$.

Para determinar la tasa de crecimiento debemos resolver,

$$MG = \sqrt[n]{(1 + r_1)(1 + r_2) \dots (1 + r_n)} - 1$$

$$MG = \sqrt[8]{1.44} - 1 = 0.0466$$

Los logaritmos pueden usarse para facilitar el cálculo de la media geométrica.

$$MG = \left\{ \exp. \left[\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \ln (1 + r_t) \right] \right\} - 1$$

donde $\exp. [x]$ significa el antilogaritmo natural de x o sea e^x .

La media geométrica sobre n períodos tiene la virtud que, cuando es computada iguala a la relación R_n/R_0 o sea, $R_0(1 + MG)^n = R_n$.

El promedio aritmético de retornos es siempre \gg MG X

Si tenemos	t	t ₁	t ₂	Total
Retorno	40.-	80.-	40.-	
Promedio retorno		100%	-50%	(100-50)/2=25%
El l_n de R		.693	-.693	$\exp\left[\frac{(.693-.693)}{2}\right]$
				- 1 = 0

$$l_n \ 80/40 = l_n \ 2 = .693; l_n \ 0,5 = -.693$$

La diversificación puede aumentar la media geométrica de los retornos.

Inversión	$1 + r_1$	$1 + r_2$	$(2 + r_1 + r_2)/2 = \mu$
A	1.4	1.0	1.2
B	1.4	1.0	1.2
C	1.0	1.4	1.2

Si las inversiones A y B son combinadas por partes iguales

$$\begin{aligned} \text{Var A} + \text{B} = \text{Var N} &= \sum_{i=1}^2 p_i (R_i - E(R))^2 = 1/2 (1.4 - 1.2)^2 + 1/2(1-1.2)^2 = \\ &= 1/2 (0,04) + 1,2 (0,04) = 0,04 \end{aligned}$$

Si se combinan B y C por partes iguales, el valor esperado M es también 1.2; sin embargo las inversiones B y C están inversamente correlacionadas y tienen en consecuencia $\text{Var B} + \text{C} = \text{Var M}$

$$1/2 (1.2 - 1.2)^2 + 1/2 (1.2 - 1.2)^2 = 1/2 (0) + 1/2(0) = 0$$

Las medias geométricas de M y N son

$$\begin{aligned} \text{MG}_N &= \sqrt{(1.4)(1.0)} = \sqrt{1.4} = 1.184 \\ \text{MG}_M &= \sqrt{(1.2)(1.2)} = \sqrt{1.44} = 1.20 \end{aligned}$$

La media geométrica de M es mayor, por tener una menor varianza. La media geométrica aumenta en tanto y cuanto la varianza de los retornos de los distintos períodos disminuye.

<u>Inversión</u>	<u>M</u>	<u>Q</u>	<u>N</u>
$R_1 = 1+r_1$	1.2	1.3	1.4
$R_2 = 1+r_2$	1.2	1.1	1.0
Media aritmética de R	1.2	1.2	1.2
Media aritmética de R	$\sqrt{(1.2)(1.2)} > \sqrt{(1.3)(1.1)} > \sqrt{(1.4)(1.0)}$		
MG	$= \sqrt{1.44} > \sqrt{1.43} > \sqrt{1.40}$		
MG	$= 1.20 > 1.195 > 1.184 \quad (12)$		

3.6 Coeficientes de variación

3.6.1 Coeficientes de variación

La dificultad que surge con la desviación estandar como medida del riesgo es que no refleja la magnitud del ingreso esperado. Para evitarlo se utiliza el coeficiente de variación o sea desviación estandar/valor esperado, lo que nos da una medida relativa de dispersión, en lugar de la medida absoluta que da la desviación estandar.

Así los empresarios preferirán entre inversiones con el mismo riesgo DE/VE , aquella que ofrezca el mayor valor esperado.

Entre inversiones con el mismo VE preferirán aquella que tenga el menor coeficiente de riesgo DE/VE .

Si consideramos una inversión de \$100.- con un ingreso posible de \$115 y una desviación estandar de \$10.- transformando en porcentos.

$$VE \text{ de retorno} = (115 - 100)/100 = 15 \%$$

$$\text{desviación estandar } 10/100 = 10 \%$$

$$\text{coeficiente de variación o riesgo} = 2/3 = 10/15$$

Los proyectos más riesgosos, que por definición poseen una mayor σ en relación a μ son automáticamente relegados.

En caso de racionamiento de capital es útil el empleo del índice de rendimiento.

$$IR = \text{VAN de ingresos} / \text{VAN de egresos}$$

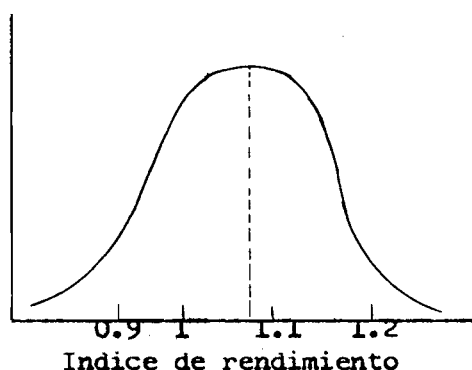
$$IR \times \text{VAN de egresos} = \text{VAN de ingresos}$$

La escasez de capital puede extenderse a varios períodos, complicando más el proceso de planeamiento que debe dilatarse, a efectos de no comprometer fondos en un período, si pueden ser empleados con mayor rentabilidad en los períodos siguientes.

El índice de rendimiento es el medio de obtener perfiles en términos relativos en lugar de representar valores absolutos.

Con este índice es posible que el inversor formule perfiles de riesgos máximos admisibles, con lo que dará consistencia a sus decisiones.

Probabilidad
de
Ocurrencia

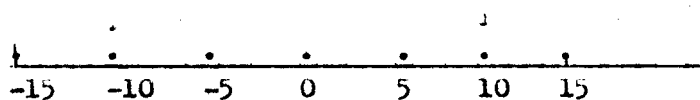


Archer y D'Ambrosio afirman que los hombres de negocios en general no hacen computaciones del tipo Media/varianza. Ellos sin embargo deben realizar un proceso similar al indicado, aunque no formalmente establecido sino a través de una serie de preguntas: -Cuáles son las probabilidades de tener éxito en el emprendimiento? Cómo será el comportamiento de los resultados a través de los años? Cuántos años durará? Generará la inversión ingresos en exceso de sus costos explícitos e implícitos? La entrada futura de otras firmas en el ramo harán disminuir las posibles utilidades alcanzables en los primeros tiempos? Qué volumen de operaciones se espera generar? Será su demanda suficientemente alta y consistente en períodos prolongados de tiempo? (1)

Varianza / 2 semivarianza, puede ser usada como una medida de inclinación. En distribuciones simétricas $V/2SV = 1$ si los extremos de la derecha son preponderantes a los de la izquierda $V/2SV$ será mayor de 1 y en caso contrario menor de 1.

Un análisis de proyectos empleando SV elegirá el que tenga mayor inclinación a la derecha o la menor a la izquierda en su distribución.

Si tenemos una distribución con la misma media y movemos dos puntos igual distancia en direcciones opuestas la media permanece constante (cambios binarios).



Cualquier cambio binario que mueve dos puntos acercándolos disminuye la varianza y si los mueve alejándolos aumenta la varianza. Los cambios binarios afectan a SV en tanto y cuanto uno o los dos puntos estén bajo E.

La elección de $V/2SV$ como medida de dispersión trae diversos conflictos. Varianza es superior en lo que respecta a costo, conveniencia y familiaridad. Se asegura que se requiere un mínimo del doble de tiempo de computadora, para obtener conjuntos de proyectos eficientes basados en SV, que el tiempo requerido para hacerlo basado en V.

Un análisis basado en V precisa obtener medias, varianzas y covarianzas, mientras que un análisis basado en SV requiere la completa distribución de retornos. V y σ son más conocidas. Sin embargo los requerimientos de establecer covarianzas entre cada par de proyectos requiere casi tanto tiempo como la búsqueda de SV y si se usara SV el mismo uso la haría tan familiar como V. Los análisis basados en V tienden a eliminar retornos muy altos y muy bajos mientras que los basados en SV se concentran a reducir pérdidas.

Si la distribución de los retornos son simétricas o tienen el mismo grado de asimetría tanto V como SV llevan a similares conclusiones.

Dado que hay pros y contras; Markowitz es de opinión de comenzar con análisis basado en V (25).

3.6.2 Restricción de las variaciones

Cord propone que en caso de incertidumbre elegimos el objetivo de maximizar el retorno total de la inversión sujeto a las siguientes restricciones.

- a) el total de fondos disponibles para inversiones no debe ser superado.
- b) la varianza promedio para la inversión total no debe exceder un nivel predeterminado.

En el presupuesto de capital, los proyectos se aceptan o rechazan y las variables pueden tomar sólo valores de 1 ó 0; la función no es cuadrática ni existen restricciones no lineales.

En el enfoque del portafolio que veremos en el capítulo 10, la función es cuadrática y su objetivo es minimizar la varianza de una suma de tasas de retorno, con la restricción que la tasa de retorno promedio sea igual o mayor que un número predeterminado.

En el enfoque del presupuesto de capital, la presunción de independencia de las tasas de retorno de los diferentes proyectos simplifica considerablemente la solución. Esto se justifica asumiendo que cualquier inversión que tuviera flujos de fondos dependientes, será mutuamente excluyente y la elección entre inversiones mutuamente excluyentes, se habrán hecho en una fase anterior al proceso de presupuesto de capital.

Modelo	I	fondos disponibles para inversiones
	I_i	fondos requeridos por el proyecto i
	r_i	la tasa interna de retorno esperada proyecto i
	V	límite superior admisible para el promedio ponderado de las varianzas del presupuesto de capital final.
	V_i	la varianza de la tasa interna de retorno esperada del proyecto i.
	x_i	una variable limitada a uno de dos valores: 1 si el proyecto i es incluido en el presupuesto y 0 si no es incluido.
	R	retorno anual esperado sobre las inversiones.
	V_i^*	$(I_i V_i / I)$, la varianza del proyecto i ponderada por la proporción de la inversión i y el total de fondos disponibles para invertir.
	P_i	$r_i I_i$ es el ingreso anual esperado de la inversión i

$$\text{maximizar } R = \sum_{i=1}^n P_i x_i \quad (1)$$

$$\text{sujeto a } x_i = 0 \quad \text{o} \quad x_i = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n I_i x_i \leq I \quad (3)$$

$$\sum_{i=1}^n V_i^* x_i \leq V \quad (4)$$

en el cual x_i son las variables a determinar (incorporar al presupuesto o no cada uno de los proyectos en consideración).

Se introduce el multiplicador de Lagrange y tenemos que maximizar

$$\sum_{i=1}^n P_i x_i - \lambda \sum_{i=1}^n V_i^* x_i$$

sujeto a (2) y (3). El multiplicador de Lagrange λ se va variando hasta que se cumpla la restricción (4), lo que lleva a continuas variaciones en la composición del paquete de inversiones.

Ejemplo:

$I = \$ 200.000$ monto máximo a invertir

$N = 25$ proyectos

$V = .007$ límite superior admisible para el promedio
ponderado de las varianzas.

DATOS

N° de Proyecto	Monto Inversión Propuesta	Tasa de Retorno	Varianza de la tasa de retorno
1	10	.11	.0004
2	37	.17	.0049
3	8	.30	.0400
4	99	.08	.0625
5	12	.27	.0036
6	66	.13	.0004
7	31	.10	.0196
8	85	.49	.0025
9	63	.44	.0100
10	73	.41	.0009
11	98	.41	.0049
12	11	.50	.0625
13	83	.41	.0016
14	88	.25	.0324
15	99	.06	.0324
16	65	.19	.0036
17	80	.06	.0004
18	74	.38	.0225
19	69	.39	.0529
20	9	.47	.0016
21	91	.43	.0196
22	80	.21	.0036
23	44	.49	.0121
24	12	.15	.0225
25	63	.12	.0441

El intervalo usado del multiplicador de Lagrange fue de 10 y la solución se alcanzó en la séptima iteración. Al usar intervalos en el aumento del multiplicador, esta discontinuidad admite la posibilidad que la solución no sea óptima o sea que si se hubiera usado un incremento menor es posible se hubiera obtenido una tasa de retorno mayor.

Variaciones en el multiplicador de Lagrange.

Iteración	Multiplicador de Lagrange	Promedio de las varianzas
1	1400	.0084745
2	1410	.0084745
3	1420	.0084745
4	1430	.0084745
5	1440	.0084745
6	1450	.0084745
7 (final)	1460	.0051355

Al caer el promedio de las varianzas de .0084745 a .0051355 se cumple la restricción $V \leq .007$.

La solución óptima involucra,

<u>Proyecto</u>	<u>Monto Inversión</u> <u>Miles de \$</u>	<u>Tasa</u> <u>Retorno</u>	<u>Monto</u> <u>Retorno \$</u>
3	8	.30	2.400
8	85	.49	41.650
11	18	.41	40.180
20	9	.47	4.230
	<u>200</u>		<u>88.460</u>

Se invierten la totalidad de los \$200.000 y el retorno anual esperado es de \$88.460 el máximo dentro de las restricciones expuestas.

Según el autor, el tiempo de computación fue de 12 minutos en un equipo IBM 70 70 (64).

Dyckman en un comentario sobre el enfoque de Cord afirma que la cifra total a invertir rara vez es un límite inflexible que la firma no pueda exceder bajo ninguna circunstancia y presente algunas va-

riantes sobre la solución a que Cord llega en el ejemplo.

<u>Plan</u>	<u>Proyectos</u>	<u>Inversión marginal en exceso de los \$200000</u>	<u>Varianza promedio máximo .007</u>	<u>Ingreso anual marginal sobre \$ 88.460</u>
1	8-9-20-23	\$ 1.000	.0069	\$ 6.700
2	8-9-12-23	\$ 3.000	.0102	\$ 7.970
3	8-10-23	\$ 2.000	.0040	\$ 4.680
4	8-9-23	(\$ 8.000)	.0072	\$ 2.470
5	8-9-23		.0069	\$ 2.870(*)

(*) Más la inversión de los \$8.000 excedentes al 5% anual que produce un ingreso anual de \$400.-

El análisis relevante es un análisis de la sensibilidad de las limitaciones de la varianza y el total a invertir, lo que sitúa inevitablemente la decisión de optimización fuera del modelo. Un modelo completo debe incorporar la información relevante relativa al uso fuera de la firma de fondos no utilizados en el presupuesto de inversiones (66).

Desde que Valor Actual Neto es una distribución normal la función normal de probabilidades puede ser usada nuevamente para precisar las probabilidades de los diferentes valores posibles de Valor Actual Neto.

También es posible usar la tasa interna de retorno TIR, recordemos que VAN es positivo cuando la TIR es mayor que la tasa de descuento d . Dado el valor de d , la probabilidad que el VAN de un proyecto sea positivo es exactamente igual a la probabilidad que la Tasa Interna de Retorno r exceda d , o sea,

$$P(\text{VAN} > 0/d) = P(r > d)$$

En la tabla de distribución probable de una inversión en la que tomamos p.ej., $d = 8\%$, encontramos que la probabilidad que el Valor

Actual Neto sea superior a cero es .865 que es también la probabilidad que la tasa interna de retorno sea superior a 8%, variando el valor de d , se puede obtener la distribución completa de probabilidades de la TIR de la inversión propuesta (23).

3.6.3 Riesgo y Tamaño de la Firma

El riesgo en una inversión individual afecta el riesgo de la firma como un todo y puede afectar su costo de capital. Debe examinarse el impacto que produce en la firma el fracaso de una inversión. Puede ser imperceptible para una firma muy potente, hasta llegar a provocar la quiebra en una firma pequeña.

Si tomamos una empresa con un patrimonio de \$30.000 y consideramos una inversión que puede originar una pérdida de \$10.000 con una probabilidad de .4; en tres inversiones sucesivas en que se repite ese fracaso, se liquida la firma. Su probabilidad de ocurrencia es de $.4^3 = .064$.

En otra firma B con un patrimonio de \$100.000 no existe probabilidad de quiebra si se pierden \$30.000.-

$$P(f) = (q/p)^z$$

$P(f)$ = Probabilidad de arruinarse en el largo plazo.

q = Probabilidad de fracaso en una inversión dada.

p = Probabilidad de éxito en una inversión dada.

z = Patrimonio total dividido por el monto de inversión requerido en cada intento.

En nuestro ejemplo:

$$y \quad P(fA) = (.4/.6)^3 \approx .30$$

$$P(fB) = (.4/.6)^{10} \approx .017$$

Llevando la posible pérdida a \$15.000 la probabilidad de quiebra es

$$P(fA) = (.4/.6)^2 = .44$$

La firma A probablemente evitará proyectos del tipo citado.

Se pone pues atención en un aspecto del riesgo, no del proyecto individual sino de la firma como un todo, haciéndose resaltar el impacto diferente que tiene una misma inversión en firmas de diferente tamaño (1).

Capítulo 3 - REFERENCIAS BIBLIOGRAFICASLibros

- | | |
|---------------------------|--|
| 1- ARCHER &
D'AMBROSIO | Business Finance, Cap. 11 y 21. |
| 3- BERANEK | Analysis for financial decisions, Cap. 6. |
| 6- BYRNE | Investment under uncertainty, Cap. II. |
| 11- FARRAR | Managerial economics, Cap. 5. |
| 12- FRANCIS &
ARCHER | Portfolio Analysis, Cap. II, Apéndice 7A. |
| 13- GRAYSON | Decisions under uncertainty, Cap. 9. |
| 16- HILLIER | Risky interrelated investments, Apéndice A1. |
| 17- HIRSHLEIFER | Investment, interest and capital, Cap. 10. |
| 20- KASSOUF | Normative decision making, Cap. 4. |
| 23- MAO | Quantitative analysis of financial decisions, Cap. 8. |
| 25- MARKOWITZ | Portfolio selection, Cap. IX. |
| 40- ROBICHEK | Investigaciones y decisiones financieras, Cap. 5.
C.J. Grayson. |
| 43- SCHLAIFER | Analysis of Decisions under uncertainty, Sección 2.3 |
| 50- VAN HORNE | Financial management and policy, Cap. 5. |

Artículos

- | | |
|-------------|--|
| 64- CORD | Allocating funds when returns are uncertain. |
| 66- DYCKMAN | Allocating funds when returns are uncertain: Comment |
| 72- HERTZ | Incertidumbre en proyectos de inversión. |
| 85- MAO | An E-S criterium for capital expenditure decisions. |
| 91- PAYNE | Uncertainty and capital budgeting. |

Capítulo 4 - FLUJO FUTURO DE FONDOS

4.1 Independencia de los Flujos de Fondos

Para considerar la desviación estandar de flujos de fondos a través de varios períodos tenemos:

$$\sigma_t = \sqrt{\sum_{x=1}^n (F_{xt} - \bar{F}_t)^2 P_{xt}}$$

σ_t = Desviación estandar del flujo de fondos en el período t.

\bar{F}_t = Valor esperado del flujo de fondos en el período t.

F_{xt} = Flujo de fondos x en el período t.

P_{xt} = Probabilidad de flujo de fondos x en el período t.

Si se desea aislar el valor tiempo del dinero es posible expresar el valor esperado de una distribución de probabilidades del Valor Actual Neto de una propuesta como:

$$VAN_t = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\bar{F}_t}{(1+i)^t}$$

Si es posible afirmar que los flujos de fondos en varios períodos son independientes entre sí, la desviación estandar es:

$$\sigma_x = \sqrt{\sum_{t=0}^{\infty} \frac{(\sigma_t)^2}{(1+i)^{2t}}}$$

Aún cuando es más sencillo aceptar que los flujos son independientes entre sí, a menudo ocurre que proyectos que empiezan mal no tienden a mejorar y viceversa.

Si tenemos esta distribución de posibilidades:

0	Período 1		Período 2		Total	
Proba Flujo VAN bilid. Fondos 10%	Proba- Flujo VAN bilid. Fondos 10%	Proba- Flujo VAN bilid. Fondos 10%	Proba- Flujo VAN bilid. Fondos 10%	Proba- Flujo VAN bilid. Fondos 10%	Proba- VAN bilid. 10%	Total
			.5	250 207	.25 -338	-84,5
	.5	+500 +455	.5	500 417	.25 -132	-33
1. -1000 -1000			.5	1000 826	.25 +735	+183,75
	.5	+1000 +909	.5	2000 1652	.25 +1561	+390,25
				VAN Esperado		+456,50

La desviación estandar es, $\sigma = \sqrt{\sum_{x=1}^n (F_x - E(F))^2 P_x}$

$$\sigma = \sqrt{.25 (-338 - 456,50)^2 + .25 (-132 - 456,50)^2 + .25 (735 - 456,50)^2 + .25$$

$$(1.561 - 456,50)^2}$$

$$\sigma_x = \sqrt{568.762} \cong 754$$

$$\frac{\mu}{\sigma} = \frac{456,50}{754} = .605$$

$$P(x \leq \mu - .605 \sigma) = 27\%$$

El proyecto tiene un Valor Actual Neto esperado de \$ 456,50 con una desviación estandar de \$ 754 y existe un 27% de probabilidad que el proyecto tenga un Valor Actual Neto negativo (8)

Para la estimación de flujos de fondos futuros, puede utilizarse el valor esperado y su desviación estandar en vez de formular una distribución discreta de valores y probabilidades.

Por medio de la desviación estandar y las tablas de distribución normal, es posible saber que para un 10% de probabilidad, los límites inferior y superior son de -1.65σ y $+1.65\sigma$.

Si el empresario considera que el valor esperado es de \$ 5.000.-, con un mínimo de \$ 3.000.- y un máximo de \$ 7.000.- y que las probabilidades de que sea menor de \$ 3.000.- es del 5% e igualmente que se supere \$ 7.000.-, se obtiene la desviación estandar dividiendo

$$\frac{2.000}{1.65} = 1212 = \sigma. \quad (50)$$

4.2. Correlación y Covarianza

Se denomina coeficiente de correlación el índice usado para medir la concordancia entre las variaciones de dos variables.

Un coeficiente de correlación puede variar $-1 \leq r \leq +1$ si $r_{ij} = +1$, los retornos de i y j son perfecta y positivamente correlacionados. Ellos se mueven en la misma dirección y al mismo tiempo con igual intensidad.

Si $r_{ij} = 0$ no existe ninguna correlación entre i y j , no mostrando tendencia a seguirse el uno al otro. Si $r_{ij} = -1$, varían inversamente, estando perfecta y negativamente correlacionados.

La covarianza entre dos variables al azar x_i y x_j es definida

$$\sigma_{ij} = E \left\{ \left[x_i - E(x_i) \right] \left[x_j - E(x_j) \right] \right\}$$

donde σ_{ij} es valor esperado de [la desviación de x_i de su valor esperado] por [desviación de x_j de su valor esperado]

y la varianza

$$V(x) = \sum_{i=1}^n p_i \left[x_i - E(x_i) \right]^2$$

La covarianza puede ser positiva, negativa o cero. Una covarianza positiva significa que valores altos de x_i , tienden a estar unidos.

dos con valores altos de x_j y que valores bajos de x_i se asocian con valores altos de x_j . Una covarianza negativa significa que valores altos de x_i implican valores bajos de x_j y viceversa.

Una covarianza cero indica que no existen tendencias.

Si $R = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ siendo $X_1, X_2 \dots X_n$ variables al azar, el valor esperado de R es igual a

$$E(R) = E(x_1) + E(x_2) + \dots + E(x_n)$$

la varianza de R

$$V(R) = V(X_1) + \sigma_{12} + \sigma_{13} + \dots + \sigma_{1n} \\ + \sigma_{21} + V(X_2) + \sigma_{23} + \dots + \sigma_{2n} \\ + \sigma_{n1} + \sigma_{n2} + \sigma_{n3} + \dots + V(X_n)$$

Si tenemos $V_{(xi)} = \sigma_{ij}$

entonces

$$V(R) = \sigma_{11} + \sigma_{12} + \sigma_{13} + \dots + \sigma_{1n} \\ + \sigma_{21} + \sigma_{22} + \sigma_{23} + \dots + \sigma_{2n} \\ + \sigma_{n1} + \sigma_{n2} + \sigma_{n3} + \dots + \sigma_{nn}$$

o sea:

$$V(R) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_{ij}$$

Cuando $i = j$ la covarianza se transforma en

$$\sigma_{ii} = \sum_{t=1}^n P_{it} (R_{it} - E(R_i))^2 \\ \sigma_{ij} = \sigma_{ii} = \sigma_{jj} = E(R_i - E(R_i))^2 = \sigma_i^2$$

que nos muestra que la covarianza de i o de j con si misma o con idénticos valores, es igual a la varianza.

Tomemos las siguientes dos inversiones con sus respectivas tasas de retorno en 10 años y consideremos que la probabilidad que ocurran esos retornos es equiprobable, o sea,

$$P_t = \frac{1}{n} = \frac{1}{10}$$

El cálculo de la covarianza y las desviaciones estándares es como sigue

$$\left[r_{it} - E(r_i) \right] \left[r_{jt} - E(r_j) \right] ; p_t \left[r - E(r_i) \right] \left[r - E(r_j) \right]$$

Año	% Tasa Retorno (rit) rit	Tasa retorno-valor esperado de tasa retorno [rit - E(r)]	% tasa retorno rjt (rjt-E(r))	Tasa retorno-valor esperado de tasa retorno E=1/n	Producto	
1	.07	0	.05	-.027	.1	0
2	.04	-.03	0	-.077	.1	+.000231
3	0	-.07	-.05	-.127	.1	+.000889
4	.07	0	.05	-.027	.1	0
5	.10	.03	.1	.023	.1	+.000069
6	.14	.07	.16	.083	.1	+ 000581
7	.07	0	.16	.083	.1	0
8	.04	-.03	.1	.023	.1	-.000069
9	.10	.03	.1	.023	.1	+.000069
10	.07	0	.1	.023	.1	0
						<u>.00177</u>

$$E(r_i) = .07 ; E(r_j) = .077 ; \sum_{t=1}^{10} P_t \left[r_{it} - E(r_i) \right] \left[r_{jt} - E(r_j) \right]$$

Para la obtención del valor esperado podemos resumir las tasas de retorno

Tasa retorno	A Probabilidad	Tasa retorno	B Probabilidad
0	.1	-.05	.1
.04	.2	0	.1

A		B	
.07	.4	.05	.2
.10	.2	.10	.4
<u>.14</u>	<u>.1</u>	<u>.16</u>	<u>.2</u>
	1.0		1.0

$$E r_i = (.1)(0) + (.2)(.04) + (.4)(.07) + (.2)(.10) + (.1)(.14) \quad E r_i = .07$$

$$E r_j = (.1)(-.05) + (.1)(0) + (.2)(.05) + (.4)(.10) + (.2)(.16); \quad E r_j = .077$$

Las respectivas desviaciones estandares son:

$$\sigma^2_A = .1(0 - .07)^2 + .2(.04 - .07)^2 + .4(.07 - .07)^2 + .2(.1 - .07)^2 + .1(.14 - .07)^2$$

$$= .1(.0049) + .2(.0009) + .4(0) + .2(.0009) + .1(.0049)$$

$$\sigma^2_A = .00134$$

$$\sigma_A = \sqrt{.00134} = 0.368$$

Siguiendo el mismo procedimiento

$$\sigma_B = .0628$$

La definición de r_{ij} es = $\frac{\text{cov}(r_i, r_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\text{pt} [r_{it} - E(r_i)] [r_{jt} - E(r_j)]}{\sigma_i \sigma_j}$

en la que $\text{cov}(i, j)$ es la covarianza de las inversiones i y j y σ_i es la desviación estandar de i

La covarianza mide como las variables varían conjunta-

mente, en consecuencia la covarianza siempre tiene el mismo signo que su correspondiente coeficiente de correlación. En nuestro ejemplo,

$$r_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{.00177}{(.0368)(.0628)} = \frac{.00177}{.00231} = + .77$$

Por lo tanto la covarianza puede ser también definida como

$$\sigma_{ij} = (r_{ij}) (\sigma_i) (\sigma_j) \quad (12)$$

En el tratamiento del riesgo, el tratamiento de correlaciones entre variables subsiste aún como el problema más difícil de resolver. Tanto es así que los resultados pueden ser totalmente equivocados si las correlaciones no son consideradas adecuadamente.

Si en el tratamiento del riesgo el uso de estimaciones conservadoras hace que el resultado sea seguramente demasiado conservador, usando solamente las mejores estimaciones se incurre en el error de no tomar en consideración otros valores de las variables que combinadas pueden resultar en variaciones substanciales en el resultado final y consecuentemente, estaríamos tomando más riesgo del deseado.

Se trata de evitar restringir el juicio a un enfoque optimista, pesimista o una evaluación en base a términos medios y realizar el análisis basado en todos los valores posibles de las variables y sus probabilidades de ocurrencia.

Con el análisis del riesgo se encuentra un camino para reducirlo, mediante la utilización de los análisis de sensibilidad.

El análisis de riesgo requiere el uso de mayor rigor, pues es un método más sistemático en el que debe considerarse, aún en los análisis más simples, más de un curso de acción.

Los problemas que crean las mayores dificultades en el análisis de riesgo son el nivel de desagregación y la evaluación de la correlación. Por nivel de desagregación se entiende el grado de detalle que abarca el análisis.

En el costo de un camino se puede distinguir el costo del terreno, movimiento de tierra, base, sub-base y pavimento. El costo de la base, puede a su vez, sub-dividirse en el costo de extraer piedras, romperlas, transportarlas y ubicarlas y así sucesivamente. El problema se simplifica cuando se tiene experiencia en estos costos; la elección de un nivel adecuado de detalle es una condición esencial para la expresión de un juicio claro. En muchos casos parecería ser que cuanto mayor desagregación, mejor. El límite viene impuesto por el problema de las correlaciones, que son difíciles de detectar y aún más difíciles de medir. Cuando las variables independientes son subdivididas el efecto de la variación de una, puede ser compensada por la variación de otra en sentido opuesto. Si están correlacionadas positivamente el efecto de la variación de una, siempre será agravado por la variación de las otras.

Las correlaciones negativas, en las que las variables sistemáticamente se compensan entre ellas, generalmente se presentan con menor frecuencia que las correlaciones positivas. La dificultad de detectar correlaciones se funda en que no se toman en consideración en el método de la estimación única y no son familiares a la generalidad; además, generalmente, se encuentran escondidas. Algunas correlaciones, en especial las relacionadas con especificaciones de ingeniería, no son muy difíciles de identificar. Tal el caso de que la fortaleza de un camino está dada por el espesor de la sub-base, de la base y del pavimento. Más dificultoso es en el caso del costo de operación de diferentes tipos de vehículos. Si por ejemplo, el costo de operación de autos se estimó bajo, no existiría razón para que ello ocurriera también con los camiones. Sin embargo, ello puede haber sucedido por haber sobreestimado la calidad del camino, en cuyo caso se ven afectados los costos de operación de

toda clase de vehículos. Si una sola persona calcula el costo de un camino y ha sobreestimado el movimiento de tierra, puede ser que ello sea debido a que tenga una tendencia sistemática a sobreestimar, en cuyo caso habría sobreestimado los costos de todos los otros elementos.

Una manera de eliminar la correlación es no sub-dividiendo los costos, al tomar el costo del camino globalmente, no debemos preocuparnos por la correlación entre sus diversos componentes por cuanto está implícitamente incluida en el costo global.

En el caso de los costos de operación de vehículos, distinguimos el costo de autos, camiones livianos y pesados y esto es una desagregación tecnológica, para el análisis de riesgo pensamos en aislar las fuentes de incertidumbre en los costos de operación de esos vehículos. Podemos distinguir tres fuentes independientes, errores en los datos en los cuales están basadas nuestras estimaciones, errores en la forma en que se han extrapolado esos datos e incertidumbre acerca de la composición de la flota de camiones.

Tenemos correlación completa en las dos primeras fuentes pero la tercera sólo afecta a los camiones y por lo tanto no se correlacionan con los costos de operación de autos; si suponemos que existe correlación entre dos variables pero no podemos cuantificar su exacto efecto en la distribución de tasas de retorno, podemos aumentar nuestra confianza examinando desde un enfoque pesimista la correlación sospechada y si el proyecto sigue siendo aceptable estaría superada nuestra sospecha. Por el contrario, si el proyecto va a ser rechazado podemos examinar un enfoque optimista de la correlación supuesta y si el proyecto continúa siendo no aceptable, quedan disipadas las dudas existentes. Si por el contrario, en cualesquiera de los dos casos cambia la posición, debemos tratar de seguir otro camino y buscar mayor información. (19)

4.3 Flujos de fondos dependientes

La varianza depende mucho de la existencia de correlación.

Si los sucesivos beneficios no están correlacionados, la varianza del Valor Actual es:

$$V(R) = V(B_0) + a^2 V(B_1) + a^4 V(B_2) + a^{2n} V(B_n)$$

donde
$$a^t = \frac{1}{(1+i)^t}$$

pero si los beneficios están perfectamente correlacionados,

$$V(R) = \left[\sqrt{V(B_0)} + a \sqrt{V(B_1)} + a^2 \sqrt{V(B_2)} + \dots + a^n \sqrt{V(B_n)} \right]^2$$

La varianza en el Valor Actual es relativamente más pequeña cuando los sucesivos ingresos no están correlacionados que cuando ellos están positivamente correlacionados, p.ej. no existiendo correlación, las sobreestimaciones pueden ser compensadas por las infraestimaciones; una correlación positiva perfecta significa que si hemos sobreestimado los ingresos en el primer año, ocurrirán sobreestimaciones en todos los años siguientes:

Para comparar varianzas, es conveniente usar:

$$CV = \frac{\sqrt{V(B)}}{\bar{B}} \quad \text{llamado coeficiente de variación}$$

El coeficiente de variación del Valor Actual = CV_a , cuando los ingresos sucesivos están perfectamente correlacionados, es igual al coeficiente de variación de los ingresos anuales, CV_b

$$\frac{\sqrt{V(R)}}{\bar{R}} = \frac{\sum \sqrt{V(B)} a^t}{\sum \bar{B} a^t} \quad \text{o sea: } C_A = C_B$$

sin embargo, si los sucesivos ingresos no están correlacionados, el coeficiente de variación del Valor Actual es:

$$C_A = C_B \frac{\sqrt{\sum a^{2t}}}{\sum a^t}$$

La tabla de relaciones entre coeficientes de variación C_A del Valor Actual y coeficiente de variación de sucesivos ingresos anuales no correlacionados C_B (para una corriente de beneficios anuales con igual Valor Esperado).

	Nº de Años	Tasa descuento		
		6%	10%	20%
$\frac{C_A}{C_B} =$	10	.32	.33	.34
	20	.24	.25	.31
	30	.20	.23	

Como era de esperar, cuanto más larga es la vida del proyecto y menor la tasa de descuento, se compensan más los errores de estimación de los ingresos verdaderos.

En general, la desviación estandar del Valor Actual derivada de la desviación estandar de cada año de ingresos anuales correlacionados, es aproximadamente 3 a 4 veces más grande que la obtenida de la misma desviación estandar año a año de ingresos anuales no correlacionados.

Veamos un ejemplo:

Período: 8 años

Tasa de descuento: 8%

En caso de ingresos no correlacionados, la varianza del Valor Actual $V(R) = 1187$ y la desviación estandar

$$\sqrt{V(R)} = 34$$

y en caso de correlación perfecta

$$V(R) = 9149 \text{ y } \sqrt{V(R)} = 96$$

Años	$V(B)$	$\sqrt{V(B)}$
1	225	15
2	400	20
3	225	15
4	200	14
5	256	16
6	289	17
7	324	18
8	361	19

En caso de que la variación de los ingresos es el resultado de cambios anuales en el clima o en precios que no están a su vez correlacionados, puede asumirse que los ingresos anuales no estarán correlacionados; por el contrario, si la incertidumbre es consecuencia directa de no conocer la reacción del consumidor a un producto nuevo, se supone que los ingresos están perfectamente correlacionados.

Si la varianza es una función aditiva de la varianza en el nivel de beneficios y la varianza debida a las fluctuaciones producidas año a año tal que

$$V(B_t) = V(B) + V(e_t)$$

la varianza del Valor Actual de la corriente de ingresos

$$V(R) = \left(\sum a^t \right)^2 V(B) + \left(\sum a^{2t} \right) V(e_t)$$

Para medir la relativa sensibilidad de la varianza del Valor Actual es útil calcular elasticidades, o sea el porcentaje de cambio en la varianza del Valor Actual a un cambio del 1% en la varianza de un factor. Cuando los factores agregados no son correlacionados, la elasticidad aumenta hasta la unidad.

A menos que la vida del proyecto sea muy corta, y las fluctuaciones año a año sean muy grandes en relación a la incertidumbre acerca del nivel de ingresos, la varianza del Valor Actual es sumamente insensible a las variaciones no correlacionadas en los ingresos proyectados año a año.

La elasticidad (E) de $V(R)$ con respecto a $V(e_t)$ es:

$$E_v(e_t) = \frac{1}{1 + \frac{(\sum a^t)^2}{\sum a^{2t}} \cdot \frac{V(B)}{V(e_t)}}$$

La elasticidad para las tasas de descuento del 6%, 10% y 20% y para las relaciones $V(e_t) = V(B)$; $V(e_t) = 2 V(B)$ y

$V(e_t) = 3 V(B)$ se muestran a continuación.

Elasticidad de la varianza del Valor Actual de un flujo de ingresos con respecto a la varianza de ingresos sucesivos no correlacionados cuando $B_t = B + e_t$

Nº de Años	Tasa descuento		
	6%	10%	20%
	(1) $V(e_t) = V(B)$		
10	.093	.097	.098
20	.053	.060	.088
30	.040	.051	-
	(2) $V(e_t) = 2 V(B)$		
10	.171	.177	.180
20	.100	.114	.163
30	.076	.097	-
	(3) $V(e_t) = 3 V(B)$		
10	.236	.244	.245
20	.143	.162	.225
30	.111	.138	-

La elasticidad de $V(A)$ con respecto a $V(B)$ es:

$$1 - E_v (e_t)$$

Los beneficios pueden crecer en el tiempo por haber construido una estructura con capacidad inicial excesiva, que se va utilizando con el correr del tiempo o en general un aumento de la demanda a través del tiempo de los servicios provistos por la inversión. También los beneficios pueden declinar por la progresiva obsolescencia física o tecnológica de la inversión.

Si consideremos un proyecto de 20 años, con tasa de descuento 10%.

El retorno anual esperado no es conocido con certeza pero tiene una distribución normal con media de 100 y una desviación estándar 10. Se esperan variaciones de año a año en los ingresos y si la

desviación estandar de esas fluctuaciones es también 10, la varianza total del Valor Actual es 30800, su desviación estandar 175 y la media del Valor Actual 850. Si se hubieran desechado las fluctuaciones anuales de los ingresos no correlacionadas, la varianza hubiera sido 28960 y la desviación estandar 170, de donde las variaciones anuales no correlacionadas influyen solamente 6% a la varianza del Valor Actual. La elasticidad en la tabla con respecto a estas fluctuaciones es 6%.

Si los beneficios anuales tienen una tendencia incierta

Un beneficio anual B_t puede ser representado por la siguiente ecuación:

$$B_t = B_0 + bt + e_t$$

B_0 = beneficio año inicial

b = crecimiento anual

t = número de años desde el año inicial

e_t = efectos desconocidos que hacen desviar un beneficio de su tendencia normal

si \bar{e} se presume sea cero

tenemos:

$$\text{media } \bar{R} = B_0 (\sum a^t) + \bar{b} (\sum ta^t)$$

y la varianza

$$V(R) = (\sum a^t)^2 V(B_0) + (\sum t \cdot a^t)^2 V(b) + (\sum a^{2t}) V(e_t)$$

Es interesante notar la relativa sensibilidad de \bar{R} a \bar{B}_0 (el nivel inicial de ingresos) y a \bar{b} (el promedio de crecimiento anual).

Veamos la tabla siguiente en la cual los ingresos se doblan en 10 años $\bar{b} = \frac{B_0}{10}$ y en 20 años $\bar{b} = \frac{B_0}{20}$

Elasticidad del Valor Actual esperado \bar{R} con respecto al Valor Actual Esperado del crecimiento anual y al Valor Actual Esperado

de los beneficios iniciales \bar{B}_0 .

$$\text{La elasticidad de } \bar{R} \text{ con respecto a } \bar{b} = \frac{1}{1 + \frac{(\sum at)}{(\sum ta^t)} \cdot \frac{\bar{B}_0}{\bar{b}}}$$

Años del Proyecto	Elasticidad con respecto a:	Tasa descuento		
		6%	10%	20%
		$\bar{b} = \frac{B_0}{10}$		
10	\bar{b}	.33	.32	.29
	\bar{B}_0	.67	.68	.71
20	\bar{b}	.46	.43	.35
	\bar{B}_0	.54	.57	.65
30	\bar{b}	.53	.48	.37
	\bar{B}_0	.47	.52	.63
		$\bar{b} = \frac{B_0}{20}$		
10	\bar{b}	.20	.19	.17
	\bar{B}_0	.80	.81	.83
20	\bar{b}	.30	.27	.21
	\bar{B}_0	.70	.73	.79
30	\bar{b}	.36	.32	.23
	\bar{B}_0	.64	.68	.77

Un proyecto con 10 años de vida, un crecimiento bajo de $\bar{b} = \frac{\bar{B}_0}{20}$ y tasa de descuento 20%, un 10% de cambio en el crecimiento anual sólo cambiaría el Valor Actual en 1,7% mientras que un proyecto con 30 años $\bar{b} = \frac{\bar{B}_0}{10}$ y 6% tasa descuento, el Valor Actual cambiaría 5,3%.

Por el contrario, con un cambio del 10% en el ingreso anual \bar{B}_0 en el primer caso, el Valor Actual cambiaría 8,3% y en el segundo 4,7%. Las dos elasticidades siempre suman 1 (elasticidad con respecto

$$a \bar{b} \text{ y } \bar{B} \quad 1,7 + 8,3 = 10 \quad \text{y} \quad 5,3 + 4,7 = 10)$$

La tabla siguiente muestra la elasticidad de la varianza del Valor Actual $V(R)$ con respecto a $V(b)$, $V(B_0)$ y $V(e)$.

Las varianzas relativas de B_0 , B y e se supone que son iguales y se ha asumido que el coeficiente de variación de B_0 y b es 0,25; así si \bar{B}_0 es 10 y \bar{b} es 1, las respectivas variaciones estandar son 2,5 y 0,25 y la desviación estandar de e_t es 2,5.

Años de duración del Proyecto	Elasticidad $V(R)$ con respecto a	Tasa de descuentos		
		6%	10%	20%
		$(\bar{b} = \frac{\bar{B}_0}{10})$		
10	$V(b)$.19	.17	.13
	$V(B_0)$.74	.75	.78
	$V(e_t)$.07	.08	.09
20	$V(B)$.41	.34	.21
	$V(B_0)$.57	.61	.76
	$V(e_t)$.02	.05	.03
		$(\bar{b} = \frac{B_0}{20})$		
10	$V(b)$.05	.05	.04
	$V(B_0)$.86	.86	.87
	$V(e_t)$.09	.09	.09
20	$V(b)$.15	.12	.06
	$V(B_0)$.81	.83	.85
	$V(e_t)$.04	.05	.09

Las elasticidades muestran que la varianza total es más sensible a la varianza de B_0 por cuanto un cambio en el nivel de ingresos tiene un efecto constante en el valor actual de cada año, mientras que un cambio en el crecimiento anual tiene poco efecto en los años iniciales y un efecto mayor en los subsiguientes, que se ve aminorado por el descuento en un número mayor de años. Es de notar la relativa falta de sensibilidad del Valor Actual de las estimaciones de los errores de cada año no

correlacionados.

Así, para un proyecto de fertilización agrícola, se puede predecir con precisión si se conocen los aumentos de producción debidos a los fertilizantes en condiciones climáticas promediadas y es desecharle que en ciertos años, los beneficios fluctúen debido a fluctuaciones no correlacionadas en las condiciones climáticas.

Las elasticidades del Valor Actual con respecto a las variaciones de B_0 , b y e son:

$$E_v(B_0) = \frac{1}{1 + \frac{(\sum ta^t)^2}{(\sum a^t)^2} \cdot \frac{v(b)}{v(B_0)} + \frac{(\sum a^{2t})}{(\sum a^t)^2} \cdot \frac{v(e_t)}{v(B_0)}}$$

$$E_v(b) = \frac{1}{1 + \frac{(\sum a^t)^2}{(\sum ta^t)^2} \cdot \frac{v(B_0)}{v(b)} + \frac{(\sum a^{2t})}{(\sum ta^t)^2} \cdot \frac{v(e_t)}{v(b)}}$$

$$E_v(e_t) = \frac{1}{1 + \frac{(\sum a^t)^2}{(\sum a^{2t})} \cdot \frac{v(B)}{v(e_t)} + \frac{(\sum ta^t)^2}{(\sum a^{2t})} \cdot \frac{v(b)}{v(e_t)}}$$

Las fluctuaciones, año a año, de los ingresos y egresos no correlacionadas son de relativa importancia en términos de la distribución de probabilidades de los beneficios del proyecto. En lugar de ello se debe concentrar la atención en asegurar que es adecuadamente considerada la incertidumbre del nivel persistente de costos y beneficios.

En general, el problema de estimar la extensión de la correlación entre las diversas distribuciones de probabilidades de los eventos elementales es idóneo para probar los aspectos más dificultosos en la aplicación del procedimiento. Cuando se estima directamente la distribu

ción de probabilidades de un evento complicado, tal como la tasa de retorno de una inversión, las correlaciones se han tomado implícitamente en consideración. Si esa distribución se estima sintetizando los efectos de diversos factores, las correlaciones deben ser explicitadas y consideradas. De otra forma, las ventajas de la desagregación deben ser seriamente cuestionadas (39).

4.4. Combinación de mutua independencia y perfecta correlación - Modelo de Hillier

Al considerar las variables involucradas se puede asumir que que todas ellas son mutuamente independientes o que están completamente correlacionadas, sin embargo ocurre a menudo que se entremezclan las variables independientes y las correlacionadas.

Cuando se compara proyectos mutuamente excluyentes, la alternativa que tenga el mayor valor esperado será la elegible, o sea:

$$VAN = \sum_{j=1}^n (a^j x_j) \quad P = \sum_{j=0}^n (a^j \mu_j)$$

Asumiendo que $X_0, X_1 \dots X_n$ son mutuamente independientes la varianza será

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=0}^n (a^{2j} \sigma_j^2)$$

Si se asume que $X_0, X_1, \dots X_n$ son perfectamente correlacionadas, si valor de X_n es $\sigma_m + C \mu_m$, el valor que toma X_j debe ser $\mu_j + C \sigma_j$, para $j = 0, 1 \dots m \dots n$, es decir que si por cualquier circunstancia el flujo de fondos de un período se desvía del valor esperado, los flujos posteriores se verán afectados por esta desviación, en manera comparable, de donde la desviación estandar será

$$\sigma_p = \sum_{j=0}^n (a_j \sigma_j)$$

Un modelo más real combina los dos supuestos citados. En este modelo se presume que el flujo neto de fondos de cada período está compuesto por un flujo de fondos independiente más m flujos de fondos diferentes perfectamente correlacionados con los correspondientes flujos de fondos de los restantes períodos.

El valor esperado tiene una distribución normal con

$$\mu_p = \sum_{j=0}^n (a_j \mu_j) = \sum_{j=0}^n \left[E(Y_j) + \sum_{k=1}^m E(Z_j^{(k)}) \right] a_j$$

En donde Y_j es una variable mutuamente independiente y $Z_j^{(k)}$ variando k entro 0 y m son variables perfectamente correlacionadas.

En consecuencia la varianza es

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=0}^n a_j^2 \text{Var}(Y_j) + \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=0}^n \left[a_j \sqrt{\text{Var}(Z_j^{(k)})} \right] \right)^2$$

Este modelo se puede transformar en los dos supuestos primeros haciendo $m = 0$ y en consecuencia se considera únicamente la total independiencia de las variables. El caso de total correlación se obtiene haciendo $m = 1$ y $Y_j = 0$

En la ecuación anterior vemos que dados como fijos los valores de a_j el valor de σ_p es menor en el caso de completa independiencia y mayor en el caso de completa correlación.

Supongamos que un proyecto de inversión de \$ 10.000 se determina

$$\mu_p = 1.000 \text{ y } \mu_p = 2.000$$

El procedimiento usual sería que la inversión se aprueba

cuando $\mu_p > 0$, sin embargo considerando la información adicional de la desviación estandar, $\sigma_p = 2.000$, resulta que la inversión tiene un alto riesgo, pues la probabilidad que el Valor Actual Neto sea negativo es 0.31 (tomado de los valores de las tablas de distribución normal) y que la probabilidad que la pérdida sea mayor de \$ 3.000 ($P_p - 2\sigma_p$) es de 0,023.

Teniendo en cuenta la situación financiera de la firma el ejecutivo se vale de esta información para tomar su decisión.

La tasa interna de retorno es la que hace $P = 0$, Hillier propone buscar la distribución de probabilidades de P para diversos valores de i , para encontrar la distribución acumulativa de probabilidades de R . Tomar la probabilidad en la que $P < 0$, en cuyo caso $R < i$, por cuanto únicamente $R = i$ cuando $P = 0$ y normalmente R aumenta cuando P aumenta para un valor fijo de i ;

$$\text{Prob. } \left\{ R < i \right\} = \text{Prob. } \left\{ P < 0/i \right\}$$

Por lo tanto para encontrar la función de distribución acumulativa de R se repite el cálculo de $\text{Prob. } \left\{ P < 0 / i \right\}$ para diversos valores de i , pudiéndose seguidamente representar gráficamente la distribución acumulativa, la que puede usarse para evaluar directamente una inversión. Como generalmente la distribución de probabilidades de R se aproximará a la distribución normal, se puede usar la distribución normal como una función masa de probabilidades, cuyo valor esperado y desviación estandar pueden ser estimados examinando la función de distribución acumulativa.

Hillier da el siguiente ejemplo. Se debe elegir entre invertir en la ampliación de la producción del producto A cuya colocación se encuentra asegurada y un proyecto de un nuevo producto con mayor riesgo, pero con posibilidad de obtener utilidades mucho más interesantes.

La inversión en el caso A es \$ 400.000 pero como la estimación se considera aproximada se cree oportuno utilizar los valores de desviación estandar para la inversión y los flujos futuros de fondos incluyendo el valor residual del equipo. Los flujos de fondo son totalmente independientes, consecuentemente $m = 0$ y se reflejan en este cuadro

Año	Símbolo	Valor esperado	Desviación estandar
0	Y 0	-400	20
1	Y 1	+120	10
2	Y 2	+120	15
3	Y 3	+120	20
4	Y 4	+110	30
5	Y 5	+200	50

En el caso B hay flujo de fondos correlacionados y flujos independientes, en esta ecuación $m = 1$ en vez de $m = 0$. Ello se produce por la incertidumbre de la reacción del mercado ante el nuevo producto y así los flujos de fondos referidos al concepto ventas se consideran correlacionados, por el contrario, en lo que se refiere a producción se supone que son totalmente independientes y sus fluctuaciones son originadas por costos de reparaciones y mantenimiento.

Se toma $i = 0.10$

<u>Año</u>	<u>Referencia</u>	<u>Símbolo</u>	<u>Valor esperado</u>	<u>Desviación estandar</u>
0	Inversión inicial	Y0	-600	50
1	Producción	Y1	-250	20
2	"	Y2	-200	10
3	"	Y3	-200	10
4	"	Y4	-200	10
5	" y valor residual	Y5	-100	10 $\sqrt{10}$

<u>Año</u>	<u>Referencia</u>	<u>Símbolo</u>	<u>Valor esperado</u>	<u>Desviación estandar</u>
...	Cont.			
1	Ventas y valor residual	Z1	+300	50
2	"	Z2	+600	100
3	"	Z3	+500	100
4	"	Z4	+400	100
5	"	Z5	+300	100;

Para la inversión A con $m = 0$

$$\mu_p = \sum_{j=0}^5 \frac{E(Y_j)}{(1,1)^j} = -400 + \frac{120}{1,1} + \dots + \frac{200}{(1,1)^5} = +95$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=0}^5 \frac{\text{Var}(Y_j)}{(1,1)^{2j}} = 20^2 + \frac{10^2}{1,1^2} + \dots + \frac{50^2}{(1,1)^{10}} = 2247$$

$$\sigma_p = \sqrt{2247} = 47,4$$

El proyecto A tiene entonces un valor esperado de 95.000 y una desviación estandar de 47.400. Buscando la probabilidad que ocurra

$$\mu - \frac{\mu}{\sigma} \leq 0 \quad 95 - 95/47,4 \cong \mu - 2\sigma$$

$$\text{Prob} \left\{ P < 0 / i = 10 \% \right\} = 0,023$$

El proyecto B considerando $m = 1$

$$\mu_p = \sum_{j=0}^5 \frac{E(Y_i) + E(Z_j^{(u)})}{(1,1)^j} = -600 + \frac{50}{1,1} + \frac{400}{(1,1)^2} + \frac{300}{(1,1)^3} + \frac{200}{(1,1)^4} + \frac{200}{(1,1)^5}$$

$$\mu_p = 262$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{j=0}^5 \frac{\text{Var}(Y_j)}{(1,1)^{2j}} + \left(\sum_{j=0}^5 \left[\frac{\sqrt{\text{Var} Z^{(u)}}}{(1,1)^j} \right]^2 \right)$$

$$= 2.500 + \frac{400}{(1,1)^2} + \frac{100}{(1,1)^4} + \frac{100}{(1,1)^6} + \frac{100}{(1,1)^8} + \frac{1.000}{(1,1)^{10}} + \left[\frac{50+100+100+100+100}{1,1 (1,1)^2 (1,1)^3 (1,1)^4 (1,1)^5} \right]^2$$

= 114.700

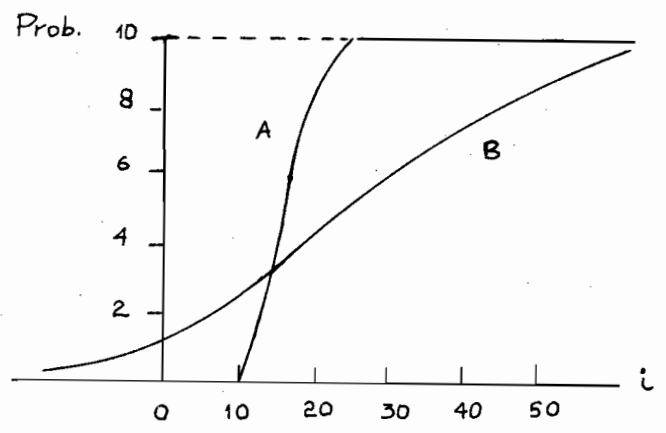
$$\sigma_p = \sqrt{114.700} = 339$$

la probabilidad que $\mu - \frac{\mu}{\sigma} \leq 0 = 0,22$

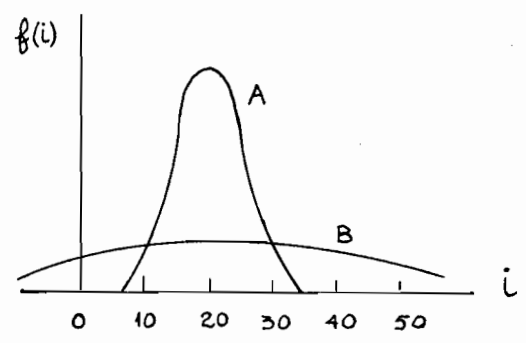
superponemos las dos curvas en una representación

Prob. $\left\{ \begin{array}{l} R \leq 10\% \text{ es para A} = 0.023 \text{ y para B} = 0.22 \end{array} \right.$

Utilizando el mismo método para otros valores de i se obtiene la distribución acumulativa de la función



Si representamos la función de densidad para A tiene un valor esperado de 18.5% y una desviación estandar de 4% y para B los valores son 25% y 20%.



La decisión entre las dos inversiones no resulta nada fácil
hay una diferencia entre el valor actual esperado

$$A = 95.000$$

$$B = 262.000$$

$$A - B = 167.000$$

y en la tasa interna de retorno

$$E(A) = 18.5 \%$$

$$E(B) = 25 \%$$

$$A - B = 6.5 \%$$

la gran diferencia está en el riesgo involucrado

$$\sigma_A = 47.400 \quad \sigma_i = 4 \%$$

$$\sigma_B = 339.000 \quad \sigma_i = 20\%$$

que obliga a examinar con detenimiento la situación financiera y considerar la gravedad que puede representar para la continuidad de la empresa un fracaso en el proyecto B. (75)

Veamos en otro ejemplo tomado de MAO (23) los distintos valores de la desviación estandar para un mismo flujo de fondos, en caso de independencia, dependencia y de independencia y dependencia combinados.

Una empresa estudia un proyecto de invertir \$ 1.800.- que generará un flujo incremental de fondos de \$ 500.- durante 5 años, su desviación estandar es de \$ 100.- Esto implica que las probabilidades del flujo anual de fondos caiga en los niveles \$ 400 a \$ 600; \$ 300 a \$ 700 ó \$ 200 a \$ 800; son .68, .95 y 1 respectivamente. Si la tasa de descuentos es 8%, el valor actual neto esperado es \$ 196, lo que haría aceptable la inversión. Aplicando la fórmula de V en caso de independencia de los flujos de fondos.

$$V = \sigma_0^2 + a^2 \sigma_1^2 + \dots + a^{2n} \sigma_n^2$$

$$V = 0 + \frac{100^2}{1,08^2} + \frac{100^2}{1,08^4} + \frac{100^2}{1,08^6} + \frac{100^2}{1,08^8} + \frac{100^2}{1,08^{10}} = 179^2$$

$$\sigma = 179$$

La decisión de la firma de aceptar o rechazar esta inversión puede considerarse como una elección entre las dos distribuciones del Valor Actual Neto siguientes, 1) un VAN con distribución normal, una media de 196 y una desviación estandar de \$ 179 o un VAN de \$ 0 con una probabilidad de 1 (o sea no hacer la inversión)

Si por el contrario los flujos de fondos son totalmente dependientes, tal el caso de un producto completamente nuevo en el mercado cuyo flujo futuro depende de la respuesta inicial de los consumidores. En el mismo ejemplo anterior:

$$V = \left(0 + \frac{100}{1,08} + \frac{100}{1,08^2} + \frac{100}{1,08^3} + \frac{100}{1,08^4} + \frac{100}{1,08^5} \right)^2 = 399^2$$

$$\sigma = 399$$

El valor de la desviación estandar es más del doble que el valor correspondiente en el caso de flujos independientes.

Siguiendo con el ejemplo supongamos que algunos componentes del flujo de fondos F' son independientes y otros F'' son dependientes.

F' tiene una distribución normal con una media de \$ 250.- y una varianza de \$ $(40)^2$. F'' también tiene una distribución normal con una media de \$ 250.- y una varianza de \$ $(80)^2$.

El Valor Actual Neto es igual a \$ 196 como en los casos an-

teriores y la varianza es igual a 327^2 .

$$V = 0 + \frac{40^2}{1,08^2} + \frac{40^2}{1,08^4} + \frac{40^2}{1,08^6} + \frac{40^2}{1,08^8} + \frac{40^2}{1,08^{10}} + \left(0 + \frac{80}{1,08} + \frac{80}{1,08^2} + \frac{80}{1,08^3} + \frac{80}{1,08^4} + \frac{80}{1,08^5} \right)^2$$

$$= 327^2 \quad \therefore \sigma = 327$$

Si comparamos los valores de σ tenemos:

	σ	μ/σ	Prob. $\mu - \sigma \leq 0$
flujos de fondos independientes	179	1,1	.14
" " " parte independientes y partes correlacion.	327	0,6	.27
" " " dependientes	399	0,5	.31

4.5 Correlaciones moderadas - Uso de Probabilidades Condicionales

En el caso de flujo de fondos dependientes o correlacionados, se presume que el resultado que va teniendo una inversión en los primeros años de su ejecución afecta los resultados de los años siguientes. Esto trae como consecuencia que cuanto mayor sea el grado de correlación, mayor será la dispersión. Cuando existe perfecta correlación, los flujos de fondos de un período son función lineal de los flujos de fondos de los otros períodos y su desviación estandar resulta mayor que la desviación estandar en el caso de mutua independencia en los flujos de fondos.

El enfoque de Hillier aproxima el fondo del problema distinguiendo entre mutua independencia y correlación perfecta y más bien puede utilizarse sin serias distorsiones para valores de correlaciones altas y bajas, pero no es aplicable a correlaciones moderadas en que no resulta posible clasificar los flujos de fondos como dependientes o independientes sin producir distorsiones de magnitud. Uno de los métodos para solucionarlo es mediante el uso de distribuciones de probabilidades condicionales.

Si consideramos un proyecto de invertir \$ 10.000 que genera en los periodos 1, 2, 3 los flujos de fondos siguientes:

Periodo 1		Periodo 2		Periodo 3		Probabilidad
Probabilidad P(1)	Flujo de Fondos	Probabilidad Condicional P(2/1)	Flujos de Fondos	Probabilidad Condicional P(3/2,1)	Flujo de Fondos	Asociada P(1, 2, 3)

25	-\$6.000	30	-\$2.000	.25	\$5.000	1	.01875
				.50	7.000	2	.03750
				.25	9.000	3	.01875
		40	1.000	.25	7.000	4	.02500
				.50	9.000	5	.05000
				.25	11.000	6	.02500
		30	4.000	.25	9.000	7	.01875
				.50	11.000	8	.03750
				.25	13.000	9	.01875
50	- 4.000	25	3.000	.30	10.000	10	.03750
				.40	12.000	11	.05000
				.30	14.000	12	.03750
		50	6.000	.30	12.000	13	.07500
				.40	14.000	14	.10000
				.30	16.000	15	.07500
		25	9.000	.30	14.000	16	.03750
				.40	16.000	17	.05000
				.30	18.000	18	.03750
25	- 2.000	30	8.000	.25	15.000	19	.01875
				.50	17.000	20	.03750
				.25	19.000	21	.01875
		40	11.000	.25	17.000	22	.02500
				.50	19.000	23	.05000
				.25	21.000	24	.02500
		30	14.000	.25	19.000	25	.01875
				.50	21.000	26	.03750
				.25	23.000	27	.01875

Mediante el uso de probabilidades condicionales, permite considerar la correlación de los flujos de fondos.

El cálculo del valor esperado se realiza por la ecuación

$$VAE = \sum_{t=0}^{\infty} a^t \overline{F}_t \quad \text{y la desviación estandar}$$

por la fórmula:

$$\sigma = \sqrt{\sum_{x=1}^l (VAN_x - \overline{VAN})^2 P_x}$$

hemos visto que hay 27 posibles probabilidades $\therefore l = 27$

El cálculo de la desviación estandar para situaciones complejas no es factible y debe recurrirse a otros medios tales como la simulación sobre la que hablaremos en el Capítulo 7.

Si bien a menudo se supone mutua independencia para facilitar los cálculos, es necesario tener en cuenta que los riesgos son mayores cuando los flujos de fondos están correlacionados, por tanto, no se da suficiente importancia a este aspecto, menospreciando el riesgo de proyectos.

El uso de probabilidades condicionales es el enfoque más seguro para este problema aún cuando es bastante difícil de implementar.

Capítulo 5 - USO DEL METODO BAYESIANO PARA LA OBTENCION DE INFORMACION
ADICIONAL.

A menudo suele suceder que ante una situación en la que se debe decidir acerca de los resultados posibles del acto a elegir, se puede optar entre, la elección del acto a realizar a pesar que la información disponible no es muy orientadora o, a los efectos de reducir la incertidumbre, obtener mayor información soportando el costo que origina y realizar entonces una decisión final. Tal puede ser un estudio de mercado más amplio o la realización de pruebas sismográficas en perforaciones de petróleo. Por medio del método Bayesiano es posible dimensionar modificaciones en la estimación de probabilidades y estimar hasta que aumento de costo es conveniente obtener mayor información.

En esencia el análisis bayesiano es un intento de incorporar toda información relevante disponible directamente en el proceso de inferencia de un cierto estado de naturaleza y en formular decisiones basadas en tales inferencias. El análisis bayesiano tiene en consideración creencias personales y probabilidades subjetivas.

Supongamos que existe un conjunto de eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos. Si bien no se conoce cual de los eventos ocurrirá necesariamente será uno y sólo uno de los considerados.

Asignamos probabilidades a cada uno de dichos eventos basándonos en evidencia existente. Si posteriormente se obtiene evidencia adicional, las probabilidades iniciales se revisan en base a los postulados del teorema de Bayes.

Las probabilidades apriori son aquellas basadas en la evidencia existente. Las probabilidades que resultan del proceso de revisión son conocidas como probabilidades a posteriori. Una característica distintiva de la estadística Bayesiana es que toma explícitamente en cuenta la evidencia apriori, mientras que la estadística clásica muchas veces la toma en forma informal.

Para el enfoque bayesiano la nueva evidencia es información adicional de la evidencia anterior y por consiguiente no la reemplaza sino que la utiliza para revisarla. El valor del enfoque Bayesiano depende de la intensidad con que ambos tipos de evidencia revelan información perteneciente al futuro estado de naturaleza incierto. Así cuando mayor es la información adicional adquirida, se irá reduciendo la incertidumbre y el tamaño de la muestra para tomar un cierto grado de certeza tenderá a ser menor cuando se tiene en consideración la evidencia a priori; lo que es muy importante por el costo que puede representar obtener la información adicional.

La información a priori puede llegar a ser totalmente subjetiva o sea diferente entre dos o más individuos. Las palabras a priori y a posteriori son palabras relativas por cuanto se refieren a estados anteriores y posteriores a una observación.

Podemos razonablemente deducir que ciertos elementos subjetivos componen todos los análisis estadísticos y que dichos análisis comparten las características de un arte y una ciencia. Si bien las estadísticas clásicas intentan hacer mínima la utilización de elementos subjetivos, las estadísticas bayesianas tratan de hacer el uso más constructivo posible de dichos elementos, sacando provecho de la experiencia tenida con problemas similares.

El enfoque bayesiano asume que hay ciertos estados de naturaleza posibles, uno de los cuales incluye la situación particular que se está considerando. Se debe pues determinar cual de los estados de naturaleza posibles es el relevante, por medio de la obtención de mayor información acerca de la situación particular que es incorporada a la existente por medio del teorema de Bayes.

Supongamos una urna con 100 bolas de dos colores cada una; uno de ellos es negro o blanco y el otro rojo o verde, por lo tanto pueden clasificarse en NR, NV, BR y BV.

Las probabilidades $P(N,R)$; $P(N,V)$; $P(B,R)$ y $P(B,V)$ son conocidas como probabilidades conjuntas, o sea que $P(N,R)$ es la probabilidad que la bola extraída sea negro y roja.

Hay dos conjuntos de probabilidades marginales:

1) $P(N)$ y $P(B)$ en donde $P(N) + P(B) = 1,0$ y

2) $P(R)$ y $P(V)$ en donde $P(R) + P(V) = 1,0$

Una bola puede ser o parcialmente negra o parcialmente blanca, pero no puede ser negra y blanca, de la misma manera, puede ser parcialmente roja o parcialmente verde pero no puede tener ambos colores a la vez.

COLOR	ROJO		VERDE		TOTALES
	Cantidad	Probabilidad	Cantidad	Probabilidad	
Negro	NR 5	$P(N,R)=0,05$	NV 50	$P(N,V)0,50$	$P(N)=P(N,R)+P(N,V)$ $0,55=0,05+$ $0,50$
Blanco	BR 20	$P(B,R)=0,20$	BV 25	$P(B,V)0,25$	$P(B)=P(B,R)+P(B,V)$ $0,45=0,20+$ $0,25$
TOTALES	R 25	$P(R)=0,25=$ $P(N,R)+P(B,R)$	V 75	$P(V)=0,75=$ $P(N,V)+P(B,V)$	$P(V)+P(R)=$ $1,0=P(N)+P(B)$ $0,75+0,25=$ $0,55+0,45$

Si consideramos la probabilidad a priori que una bola que se extraiga sea $B=P(B)=0,45$, pero si la bola es extraída y es parcialmente R, cuál es la probabilidad que sea también blanca? Aquí aparece la probabilidad condicional, o sea, la probabilidad que sea parcialmente blanca dado que es parcialmente roja. Dicho de otra manera la probabilidad a establecer es la probabilidad condicional $P(B/R)$, o sea,

$$P(B/R) = \frac{P(B,R)}{P(R)} = \frac{P(B,R)}{P(N,R)+P(B,R)} = \frac{0,20}{0,25} = 0,8$$

La población relevante no es la compuesta por todas las bolas de la urna, sino aquella que comprende a las bolas que son parcialmente rojas, o sea un sub-conjunto del conjunto total. La probabilidad que sea parcialmente N dado que es también R es $P(N/R) = 0,2$. De donde $P(B/R)+P(N/R) = 0,8 + 0,2 = 1$.

O también,

$$P(B,R) = P(B/R) P(R)$$

$$0.2 = 0.8 \times 0.25$$

Probabilidad	\propto	Probabilidad	x	Probabilidad
Conjunta		Condicional		Marginal

equivale

a

En muchos casos las probabilidades conjuntas no son conocidas directamente. Supongamos que la probabilidad a determinar es $P(R/B)$ o sea la probabilidad condicional que una bola sea parcialmente roja, dado el hecho de ser parcialmente blanca.

$$P(R/B) = \frac{P(B,R)}{P(B)} = \frac{P(B,R)}{P(B,R)+P(B,V)} = \frac{0.20}{0.44} = 0.45$$

Veamos otras posibilidades.

Si no conociéramos $P(B,R)$ ni $P(B,V)$
 siendo conocidos $P(B/R)$ y $P(B/V)$ y $P(R)$ y $P(V) = 1 - P(R)$

$$P(B,R) = P(B/R) P(R)$$

$$P(B,V) = P(B/V) P(V)$$

y sustituyendo,

$$P(R,B) = \frac{P(B/R) P(R)}{P(B/R) P(R) + P(B/V) P(V)} = \frac{0.8 \times 0.25}{(0.8 \times 0.25) + (1/3 \times 0.75)} = \frac{0.20}{0.20 + 0.25} = 0.44$$

que es un caso particular del teorema de Bayes por cuanto generalizando:

Un conjunto de R eventos mutuamente excluyentes y exhaustivos r_i ; $i=1, 2, \dots, R$ y otro conjunto S cuyos eventos son s_j ; $j=1, 2, \dots, S$.
 Para cada r_i y s_j , sea r_2 y s_4 .

$$P(r_2 / s_4) = \frac{P(r_2, s_4)}{P(s_4)} = \frac{P(r_2, s_4)}{P(r_1, s_4) + P(r_2, s_4) + \dots + P(r_R, s_4)} = \frac{P(r_2, s_4)}{\sum_{i=1}^R P(r_i, s_4)}$$

y por cuanto $P(r_2, s_4) = P(s_4 / r_2) \cdot P(r_2)$ y

$$\sum_{i=1}^R P(r_i, s_4) = \sum_{i=1}^R \left[P(s_4 / r_i) P(r_i) \right]$$

Una forma general del teorema de Bayes:

$$P(r_2 / s_4) = \frac{P(s_4 / r_2) P(r_2)}{\sum_{i=1}^R \left[P(s_4 / r_i) P(r_i) \right]}$$

y consecuentemente,

$$P(s_4 / r_2) = \frac{P(r_2 / s_4) P(s_4)}{\sum_{j=1}^S \left[P(r_2 / s_j) P(s_j) \right]}$$

Supongamos que hay tres marcas de lavarropas, cuya participación del mercado es:

$$A = 0.5 \quad B = 0.3 \quad C = 0.2$$

se conocen que son equipos defectuosos,

$$A = 0.2 \quad B = 0.15 \quad C = 0.05$$

Supongamos que compramos un lavarropa y resulta defectuoso, la probabilidad que sea marca A es:

$$P(A/D) = \frac{P(D/A) P(A)}{P(D/A) P(A) + P(D/B) P(B) + P(D/C) P(C)} = \frac{0.2 \times 0.5}{(0.2 \times 0.5) + (0.15 \times 0.3) + (0.05 \times 0.2)}$$

$$= 0.1 / (0.1 + 0.045 + 0.015) = 0.1 / 0.15 = 2/3$$

Supongamos el caso de una compañía de ómnibus que considera la posibilidad de extender un servicio especial suburbano para abonados del servicio principal. En el suburbio viven 200 abonados y el plan es que un ómnibus los transporte desde el suburbio a la zona céntrica por la mañana y a la tarde se haría el viaje de regreso y se proyecta cobrar \$0,50 por cada viaje simple.

Información disponible de casos similares indica que las proporciones de abonados que utilizarían el servicio sería:

<u>Proporción</u>	<u>Frecuencia Relativa</u>
$P_1 = 0.10$	0.60
$P_2 = 0.15$	0.25
$P_3 = 0.20$	0.15
	1.00

Se decide tomar una muestra de 20 posibles usuarios (sobre un total de 200) y el resultado es $n=20$ $x=4$ (usarían el servicio si exis

tiera). El problema es ahora como analizar mejor la información disponible.

Se podría ignorar la información histórica de otras ciudades y utilizar el resultado de la encuesta, tal cual se hace en estadística clásica.

Conforme al enfoque bayesiano se utilizaría la información de otras ciudades como información a priori y el resultado de la encuesta como información terminal o a posteriori.

Si se adopta el enfoque bayesiano, supongamos que se toma $p_i = p_1 = 0.10$ y se busca la probabilidad condicional de la observación que 4 posibles usuarios de los 20 entrevistados usarían el nuevo servicio.

Recordemos que en distribuciones binomiales si la probabilidad que ocurra algún evento es p , la probabilidad de obtener x veces tal evento en n intentos puede ser expresado:

$$P(x) = \frac{n!}{x! (n-x)!} p^x (1-p)^{n-x}$$

y para este ejemplo:

$$P(x=4/p_1) = \frac{20!}{4!6!} (0.1)^4 \times (0.9)^{16} \approx 0.0898$$

y para $p_2 = 0.15$ y $p_3 = 0.20$

$$P(x=4/p_1) = 0.0898$$

$$P(x=4/p_2) = 0.1821$$

$$P(x=4/p_3) = 0.2182$$

Las probabilidades a priori asignadas a los valores de la variable p deben ser revisadas a la luz de las probabilidades de la nueva información, a efectos de producir las probabilidades a posteriori o sea

las probabilidades condicionales.

$$P(p_1 / x=4)$$

$$P(p_2 / x=4)$$

$$P(p_3 / x=4)$$

$$\text{Un medio de calcularla sería } P(p_1 / x=4) = \frac{P(p_1, x=4)}{P(x=4)}$$

$$\text{donde } P(x=4) = P(p_1, x=4) + P(p_2, x=4) + P(p_3, x=4)$$

Entonces si $p=0.10$ aparece 60% de las veces y si en una muestra de 20 la probabilidad que aparezcan 4 positivos es del 8,98% tenemos:

$$P(p_1, x=4) = P(x=4/p_1) \times P_0(p_1) = 0.0898 \times 0.6 = 0.05388$$

$$P(p_2, x=4) = P(x=4/p_2) \times P_0(p_2) = 0.1821 \times 0.25 = 0.04553$$

$$P(p_3, x=4) = P(x=4/p_3) \times P_0(p_3) = 0.2182 \times 0.15 = 0.03273$$

donde $P_0(p_i)$ indica la probabilidad a priori.

Aplicando teorema de Bayes:

$$\begin{aligned} P(p / x=4) &= \frac{P(p_1, x=4)}{P(x=4)} = \frac{P(x=4/p_1) P_0(p_1)}{\sum_{i=1}^3 [P(x=4/p_i) P(p_i)]} = \frac{0.05388}{0.05388 + 0.04553 + 0.03273} = \\ &= \frac{0.05388}{0.13214} = 0.4078 \end{aligned}$$

y las tres posibilidades serán:

$$P(p_1/x=4) = 0.4078 = P(m=20/x=4)$$

$$P(p_2/x=4) = 0.3446 = P(m=30/x=4)$$

$$P(p_3/x=4) = 0.2447 = P(m=40/x=4)$$

donde m es el número de usuarios futuros, tomando la proporción $p_1=0.10$, $p_2=0.15$ y $p_3=0.20$ del total de 200 abonados.

En suma:

Evento	Probabilidad a priori	Probabilidad	Probabilidad Conjunta	Probabilidad a posteriori
$p_i \text{ ó } m_i$	$P_0(p_i)$	$P(x=4/p_i)$	$P(x=4/p_i) P_0(p_i)$	$P_1(p_i) = P(p_i/x=4) = P(x=4/p_i) P_0(p_i) / P(x=4)$
$p_1 = 0.10$ $m_1 = 20$	0.60	0.0898	0.0539	0.41
$p_2 = 0.15$ $m_2 = 30$	0.25	0.1821	0.0455	0.34
$p_3 = 0.20$ $m_3 = 40$	<u>0.15</u> 1.00	0.2182	<u>0.0327</u> 0.1321 = $P(x=4)$	<u>0.25</u> 1.00

donde vemos que las sumas de las probabilidades a priori y a posteriori dan 1.00.

En el proceso de pasar de las probabilidades a priori a las probabilidades a posteriori, lo que se hace esencialmente es una combinación del conocimiento general disponible con una información adicional producida por una muestra sobre el caso particular.

La decisión de realizar o no el servicio depende de los costos e ingresos que resultarían.

Hay dos valores esperados, el que corresponde a la distribución a priori $E_0(P)$ y el de la distribución a posteriori $E_1(P)$. El resultado del muestreo, en este caso, es que el valor esperado a posteriori es mayor que el valor esperado a priori:

P_i	$P_0(p_i)$	$P_i \times P_0(p_i)$	$P_1(p_i)$	$P_i \times P_1(p_i)$
$P_1 = 0.10$	0.60	0.0600	0.41	0.041
$P_2 = 0.15$	0.25	0.0375	0.34	0.051
$P_3 = 0.20$	0.15	0.0300	0.25	0.050
		<u>0.1275 = $E_0(p_i)$</u>	<u>1.00</u>	<u>0.142 = $E_1(p_i)$</u>

Supongamos que se hubiera decidido hacer la muestra de solamente 10 posibles usuarios en vez de 20 y que de estos 2 hubieran indicado que serían usuarios del servicio. La proporción x/n es exactamente igual $2/10 = 4/20$. La distribución posterior y su valor esperado son:

P_i	$P_0(p_i)$	$P(x=2/p_i)$	$P(x=2/p_i)P_0(p_i)$	$P_1(p_i)$	$P_i x P_1(p_i)$
$P_1 = 0.10$	0.60	0.1937	0.1162	0.50	0.050
$P_2 = 0.25$	0.25	0.2759	0.0690	0.30	0.045
$P_3 = 0.15$	0.15	0.3020	0.0453	0.20	0.040
	<u>1.00</u>		<u>0.2305</u>	<u>1.00</u>	<u>$0.135 = E_1(P_i)$</u>

A medida que aumenta el tamaño de la muestra se observa la tendencia del valor esperado a posteriori a acercarse a la proporción resultante de la muestra $\frac{x}{n} = 20\%$.

Habrá también algún tamaño de la muestra, más allá del cual aparecerá una tendencia, en la dispersión de la función de la probabilidad posterior medida por su desviación estandar, a disminuir con aumentos en el tamaño de la muestra. Cuanto más estrecha sea la relación entre las probabilidades condicionales y las probabilidades a priori, menor será el tamaño de la muestra a partir del cual disminuye la dispersión.

$$\begin{aligned}
 \text{Sabemos que } \sigma &= \sqrt{\sum_i \left\{ \left[P_i - E(P_i) \right]^2 P(P_i) \right\}} \\
 &= \left[(0.10 - 0.1275)^2 \times 0.60 + (0.15 - 0.1275)^2 \times 0.25 + (0.20 - 0.1275)^2 \times 0.15 \right]^{\frac{1}{2}} = \\
 &= \left[0.0275^2 \times 0.60 + 0.0325^2 \times 0.25 + 0.0725^2 \times 0.15 \right]^{\frac{1}{2}} = \\
 &\cong 0.038
 \end{aligned}$$

La función a posteriori derivada de una muestra $n=10(x=2)$ de una desviación estandar mayor $\sigma_1(P_i) = 0.039$ y en caso de $n=20(x=4)$ es aún ligeramente mayor $= 0.040$; sin embargo, a medida que el tamaño de

muestra se hace grande las probabilidades de P_1 y P_2 tienden a disminuir mientras que P_3 tiende a aumentar, lo que causará una disminución de $\sigma_1(P_i)$.

Si suponemos que $\bar{x} = 0.10$ o sea que solamente el 10% usará el nuevo servicio en una muestra de $n = 10$ $x = 1$, tenemos $\sigma(P_i) = 0.035$, o sea, que ya es menor que $\sigma_0(P_i)$, por cuanto la muestra en este caso tiende a confirmar las creencias a priori.

El enfoque bayesiano hace uso directo de las probabilidades subjetivas, reconociendo el hecho que las probabilidades verdaderamente objetivas son pocas veces alcanzables o disponibles.

Siguiendo el ejemplo, si el costo diario total del nuevo servicio es de \$27.-

MATRIZ DE PAGOS

Evento	Cursos de Acción	
	A_1 Se establece servicio	A_2 No se establece servicio
P_1 0.10	C_{11} -7.-	C_{12} 0 ϕ
P_2 0.15	C_{21} 3.- ϕ	C_{22} 0
P_3 0.20	C_{31} 13.- ϕ	C_{32} 0

Si ocurre C_{11} y se establece el servicio $P_1 = 10$ lo que significa un ingreso \$200 $p = \$20$ menos \$27 de costo total, resulta una pérdida de \$7.- La mejor acción por cada evento es indicada por un asterisco (ϕ).

El valor esperado de la acción A_1 es $P_0(p) A_1$.

Usando las probabilidades a posteriori luego de la muestra
 $n = 20$ $x = 4$

	$P_0(P)$	A_1	$P_0(P)A_1$	$P_1(P)$	$P_1(P)A_1$
		\$	\$		\$
P_1	0.60	-7.-	-4,20	0.41	-2,87
P_2	0.25	+3.-	+0.75	0.34	1.02
P_3	0.15	+13.-	+1.95	0.25	3.25
	<hr/>		<hr/>	<hr/>	<hr/>
	1.00		-1.50	1.00	1.40
	<hr/>		<hr/>	<hr/>	<hr/>

A_2 es igual a \emptyset .

En la probabilidad a priori $A_2 > A_1$.

En la probabilidad a posteriori $A_1 > A_2$

por cuanto la muestra (0.20) indica que un porcentaje mayor del esperado ($0.10 \times 0.60 + 0.15 \times 0.25 + 0.20 \times 0.15 = 0.1275$) usaría el nuevo servicio.

Otro medio de calcular sería,

$$E_0(p) = 0.1275 \quad P_0(P) A_1 =$$

$$\begin{aligned} \$1.- \times \left[(200 E_0(P)) - \$27.- \right] &= \$200.- (0.1275) - \$27.- = \\ &= \$1.50 \end{aligned}$$

y como

$$E_1(P) = 0.142 \quad P_1(P) A_1 = \$1.- \times \left[200 E_1(P) \right] - \$27.- = \$1,40$$

En la denominada matriz de pérdidas, en realidad no se trata de pérdidas sino de oportunidades de pérdidas condicionales. Son oportunidades de pérdidas en el sentido que tomado un curso de acción automáticamente se excluyen los restantes.

La relación entre ingresos y pérdidas es simple, por cuanto por cada combinación acción-evento, la pérdida es el valor absoluto de

la diferencia entre el resultado de la combinación y el resultado de la mayor acción dada la ocurrencia de un evento particular y si la acción es óptima para tal evento, la pérdida es cero.

Evento	Matriz de ingresos		Matriz de pérdidas	
	A ₁	A ₂	A ₁	A ₂
	\$	\$	\$	\$
P ₁	-7.-	0.-	7.-	0.-
P ₂	3.-	0.-	0.-	3.-
P ₃	13.-	0.-	0.-	13.-

Pérdida Esperada

Evento	Probabilidad a priori				Probabilidad a posteriori			
	P ₀ (P)	Pérdida A ₁	P ₀ (P)xA ₁	Pérdida A ₂	P ₀ (P)xA ₂	P ₁ (P)	P ₁ (P)A ₁	P ₁ (P)A ₂
		\$	\$	\$	\$		\$	\$
P ₁	0.60	7.-	4.20	0	0.-	0.41	2.87	0.-
P ₂	0.25	0.-	0.-	3	0.75	0.34	0.-	1.02
P ₃	0.15	0.-	0.-	13	1.95	0.25	0.-	3.25
			<u>4.20</u>		<u>2.70</u>		<u>2.87</u>	<u>4.27</u>

Las diferencias entre las pérdidas esperadas de las acciones A₁ y A₂ son las mismas que las diferencias entre los ingresos, ya sea para las probabilidades a priori como a posteriori. (4,20-2,70 = 1,50 y 2,87-4,27 = 1,40 respectivamente).-

El valor esperado con perfecta información es el resultado de tomar la mejor acción para cada evento multiplicada por la frecuencia relativa de ocurrencia, o sea,

		<u>\$</u>
P ₁	0.-
P ₂	0,75
P ₃	1,95
		<u>2,70</u>

El valor esperado a priori con perfecta información o el costo a priori de la incertidumbre sería la diferencia entre el valor esperado con perfecta información \$2,70 y el valor esperado a priori y como el resultado de la decisión a priori era no instalar el servicio, es \$0.- o sea $\$2,70 - \$0.- = \$2,70$.

Esto significa que si se hubiera podido comprar información perfecta en nuestro problema, se podría pagar hasta \$2,70 por día que el servicio se realizare o no, en base a esta información.

Para las probabilidades a posteriori los valores son:

		\$
P ₁	0.--
P ₂	1.02
P ₃	3.25
		4,27

y si le restamos el valor esperado con incertidumbre para las probabilidades a posteriori \$1,40, el costo a posteriori de la incertidumbre es \$2,87 diarios. Nótese que ambos importes \$2,70 y \$2,87 son los mismos que las pérdidas esperadas a priori y a posteriori y que el resultado de tomar la muestra ha incrementado el valor esperado con perfecta información de \$2,70 a \$2,87, o sea, \$0,17 por día. Lo que ha ocurrido es que el resultado de la muestra no sólo ha cambiado la decisión pasando de A₂ a A₁ sino que también ha aumentado el grado de duda de la decisión debido a la diferencia sustancial entre la función de probabilidad a priori y la función de probabilidad a posteriori.

Debe destacarse que los valores esperados con información perfecta pueden ser usados para determinar por adelantado si es o no ventajoso obtener información adicional cuando ésta tiene un costo, por cuanto la decisión se debe efectuar antes que sea conocida dicha información adicional.

En el caso que las pérdidas posibles sean de gran importancia en relación al valor total de la empresa, el enfoque bayesiano es continuar aplicando la regla de decisión de minimizar la pérdida esperada, pero no ya referida en términos monetarios de valores esperados sino de utilidad, determinada por la función de utilidad del empresario. En tal caso surgen dos dificultades: 1) la utilidad es un concepto estrictamente subjetivo y 2) la dificultad de establecer una medida precisa de la incertidumbre. Un enfoque es usar como medida de la incertidumbre, la dispersión de las funciones de probabilidades. Todo esto nos sugiere que el proceso de decisión puede resultar complejo y que no siempre se podrá interpretar las razones por las que el tomador de decisiones ha elegido un curso determinado de acción. Sin embargo una vez que el tomador de decisiones define su función de utilidad y mide en términos de utilidad las consecuencias o resultados de las acciones alternativas, lo que resta del proceso de decisión ya ha sido analizado, con la única diferencia que los resultados o pérdidas en vez de ser medidos en términos monetarios, lo son término de utilidad. La regla de la decisión bayesiana sigue siendo minimizar la pérdida esperada.

Entre los diferentes tipos de funciones teóricas de probabilidad hay dos tipos muy relevantes, la función rectangular o uniforme y la normal o Gaussiana.

La función "difusa" de probabilidades a priori es rectangular o sea, que los eventos cubiertos por el rectángulo tienen probabilidad uniforme de ocurrencia y fuera de esos límites o intervalos la probabilidad es cero. Frecuentemente indica ignorancia a priori acerca del verdadero valor de la variable.

También se interpreta que en ausencia de ninguna información a priori acerca del valor real de la variable, al asignar probabilidades a priori iguales a todos los valores posibles, se tiende a minimizar el error máximo.

Retornemos al servicio de ómnibus y consideremos que por falta de información asignamos igual probabilidad a priori a los eventos, o sea $P_0(p_i) = 1/3$, vemos:

<u>Evento</u>	$P_0(P)$	$P(x=4/P_i)$	$P(x=4/P_i)P_0(P)$	$P_i(P)$	$\frac{P(x=4/P)}{0.4901}$
P_1	1/3	0.0898	0.0299	0.183	0.183
P_2	1/3	0.1821	0.0607	0.372	0.372
P_3	1/3	0.2182	0.0727	0.445	0.445
		0.4901	0.1633	1.000	1.000

Se demuestra que dada la rectangularidad de la probabilidad a priori, las probabilidades a posteriori dependen enteramente del número posible de estados y del resultado de la muestra, o sea, de las probabilidades que surgen de la evidencia adicional. La asignación de probabilidades a priori iguales tiende a resultar en un monto máximo de error más pequeño que el que resultaría de cualquier otro conjunto de probabilidades, en cuanto no haya evidencia que sugiera cualquier otro conjunto de probabilidades. Recordemos que cuanto mayor es la discrepancia entre la información a priori y la información resultante de la muestra, mayor resulta la desviación estandar. Al asignar probabilidades a priori iguales se minimiza la posibilidad de tal discrepancia. El concepto de una función "difusa" de probabilidades a priori, lleva el análisis a términos muy parecidos a los de la inferencia estadística clásica.

En caso de la función de probabilidad normal, en la que el límite entre 300 y 700 tiene una probabilidad de ocurrencia de .5. Dado el valor esperado de la función de probabilidad a priori, solamente se necesita conocer la desviación estandar $\sigma_0(P)$ para tener completamente determinada la función.

$$E_0(Q) = 500 \text{ y } E_0(P) = 0.01$$

$$\text{Si se asume que } P_0(300) \leq Q \leq (700) = 0.5$$

$$P_0(0.006 \leq P \leq 0.014) = 0.5$$

En donde p es la fracción que resulta de dividir p.ej. el número de autos marca x por el número de hogares.

$$P_o (P < 0.006) = 0.25 \text{ y } P_o (p > 0.014) = 0.25$$

La desviación normal estandarizada z puede ser definida como

$$z = \frac{P - E_o (P)}{\sigma_o (P)}$$

$$\begin{aligned} P_o (P > 0.014) &= P_o \left[z > \frac{0.014 - 0.010}{\sigma_o (P)} \right] \\ &= P_o \left[z > \frac{0.004}{\sigma_o (P)} \right] = 0.25 \end{aligned}$$

por las tablas de la curva normal tenemos que,

$P (z > 0,67) = 0,25$ o sea, se ha buscado el valor de z para el cual la probabilidad que cualquier valor de z sea mayor, es de 0.25.

$$0.004 / \sigma_o (P) = 0,67 \therefore \sigma_o (P) \cong 0.006$$

Para obtener aproximaciones discretas de la función de probabilidad normal se utiliza la desviación estandar (31).

Veamos otro ejemplo ilustrativo: Suponemos que la alternativa de construir una planta de mayor capacidad que la existente deja un Valor Actual Neto de 1,47 millones mientras que construir una planta para la producción actual nos da un VAN 1,18 millones. Ante esto la empresa decide hacer un estudio de mercado más profundo para determinar más cuidadosamente las posibilidades a mediano plazo de penetración en el mercado.

Es aconsejable determinar hasta que costo conviene efectuar el estudio. Suponemos que una de las condiciones del mercado previstas ocurre, elegimos la estrategia preferida y se calcula el VAN. Luego se multiplica el Valor Actual Neto de cada condición de mercado por la

respectiva probabilidad de ocurrencia.

<u>Situación de la demanda</u>	<u>Estrategia Preferida</u>	<u>VAN al 10%</u>	<u>Probabilidad Estimada</u>	<u>Valor actual Esperado</u>
		\$		
Siempre alta	Planta mayor	3,7	.60	2,22
Alta inicial, luego baja	" normal	1,5	.10	0,15
Siempre baja	" normal	1,5	.30	0,42
				\$2,79

Vemos que \$2,79 millones es bastante mayor que \$1,47 millones que era el Valor actual Esperado de la alternativa de construir la planta mayor. La diferencia de \$1,32 representa el valor de información perfecta comparado con incertidumbre, sugiriendo que hay un ingreso potencial a la espera de que se reduzca la probabilidad de errores, al reducir la incertidumbre de las estimaciones.

Si el empresario estima que si la demanda del mercado es alta desde el comienzo la probabilidad que la investigación muestre una alta demanda es 70%. Si la demanda es alta pero luego baja, la investigación tiene una probabilidad del 50% de mostrar un resultado positivo, que se reduce al 5% si la demanda es siempre baja.

Con estas estimaciones es posible calcular que:

Si la investigación resulta positiva, la probabilidad de una demanda alta es .87, la de una demanda alta al principio para luego caer, es .10, y una demanda siempre baja tiene 0.03.

Si la investigación tiene resultado negativo las probabilidades serían .35, .10 y .55.

sea AA = siempre alta

AB = alta baja

BB = siempre baja

F resultado positivo de la investigación

N resultado negativo de la investigación

$$\begin{aligned}
 P(AA/F) &= \frac{P(F/AA) \cdot P(AA)}{P(F/AA) \cdot P(AA) + P(F/AB) \cdot P(AB) + P(F/BB) \cdot P(BB)} = \\
 &= \frac{.7 \times .6}{.7 \times .6 + .5 \times .1 + .05 \cdot 3} = \frac{.42}{.42 + .05 + .015} = \frac{.42}{.485} = .87
 \end{aligned}$$

$$P(AB/F) = \frac{.05}{.485} = .10$$

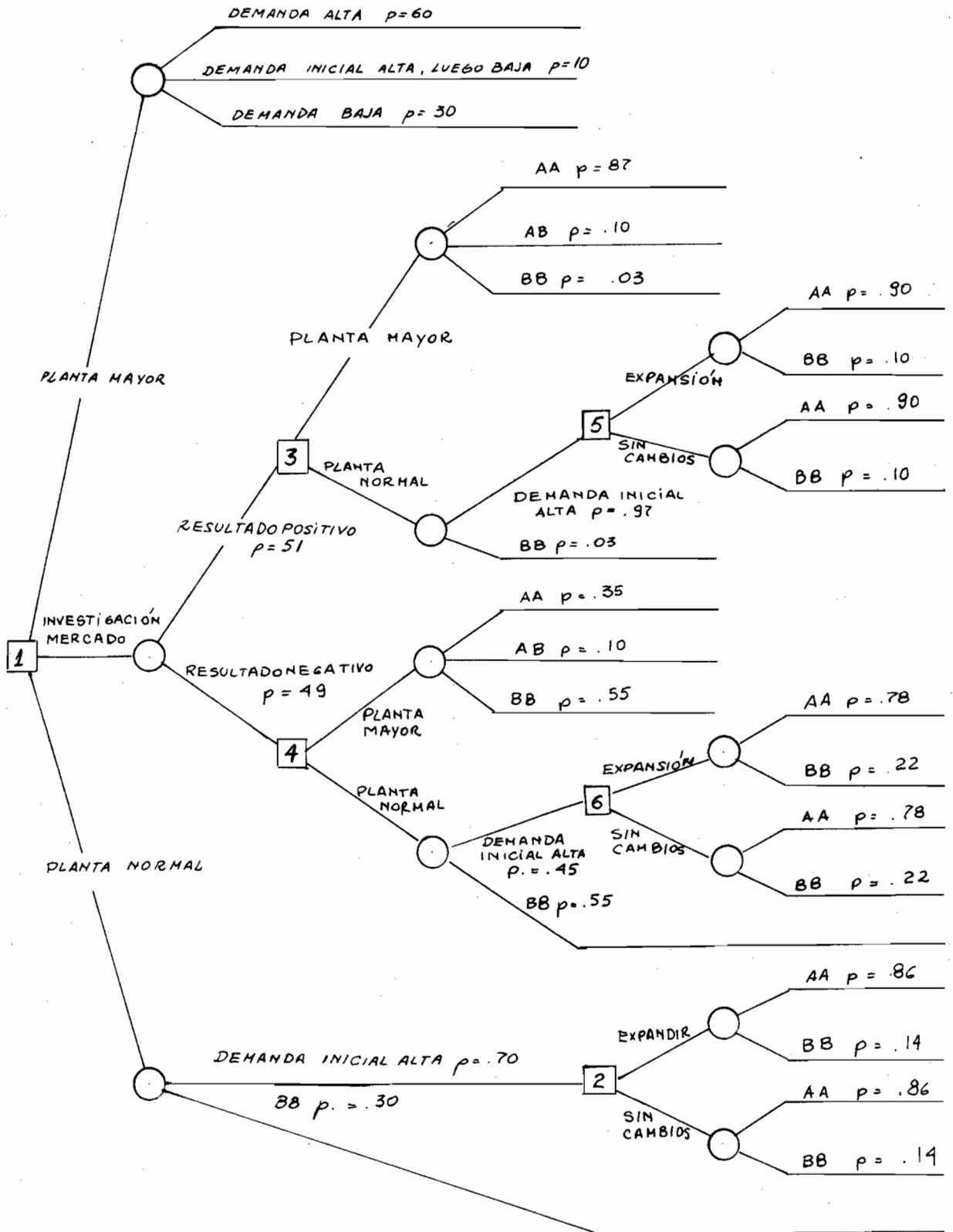
$$P(BB/F) = \frac{.015}{.485} = .03$$

$$\begin{aligned}
 P(AA/N) &= \frac{.3 \times .6}{.3 \times .6 + .5 \times .1 + .95 \times .3} = \frac{.18}{.18 + .05 + .285} = \frac{.18}{.515} = .35
 \end{aligned}$$

$$P(AB/N) = \frac{.05}{.515} = .10$$

$$P(BB/N) = \frac{.285}{.515} = .55$$

Construyendo el diagrama con la alternativa de la investigación de mercado:



- Evento
- Punto de decisión

PLANTA MAYOR: Inversión \$3 Millones
 PLANTA NORMAL: Inversión \$ 1.3 Millones
 EXPANSIÓN POSTERIOR: Inversión \$ 2.2 Millones

Se tienen tres alternativas: 1) construir la planta mayor, 2) construir la planta normal con la posibilidad de expansión en el punto de decisión 2 ó 3) hacer la investigación con un costo de \$100.000.-

Al calcular los Valores Actuales Netos al 10% vemos que en el punto de decisión 3 (investigación con resultado positivo) la decisión sería construir la planta mayor con un VAN de \$3,1 millones.

Si el que decide se encontrara en el punto de decisión 4 (investigación con resultado negativo) la decisión sería construir la planta normal y mantenerla, ya sea que la demanda inicial sea alta o baja; el Valor Actual Neto correspondiente es \$2,6 millones.

El valor actual esperado de la alternativa 3 - efectuar una investigación de mercado al costo de \$100.000 antes de decidir el tamaño de la planta - sería:

		<u>En millones de \$</u>
.485 x \$3,1	=	1,5
.515 x \$2,6	=	<u>1,3</u>
		2,8
menos costo investigación		<u>0,1</u>
		<u><u>2,7</u></u>

Ya hemos dicho que la alternativa 1 y 2 tenían Valor Actual Neto de \$1.47 y \$1.18 millones.

La investigación ha aumentado el valor esperado en \$1.23 millones, reduciendo la incertidumbre acerca de la demanda y el Valor Actual Neto resultante se aumenta sustancialmente y ello no se relaciona con el resultado de la investigación (83).

Siempre es bueno recordar que la información adicional debería ser adquirida en tanto y cuanto el valor marginal de la información exceda su costo marginal. Cuanto menor sea la dispersión de la fun-

ción de probabilidad, mayor será el volúmen de información, sumariado por su media.

El tamaño de la muestra óptima debe ser tal que:

$$\text{Costo total muestra } n < \text{Valor Esperado con información Perfecta}$$

Puede resultar posible limitar el límite de los valores óptimos de n calculando diversos resultados terminales esperados y costos totales de muestreo para valores seleccionados de n para tomar idea del comportamiento de estas variables.

Una de las cosas más útiles de hacer es variar la distribución de probabilidades a priori y ver que pasa con el análisis. Si variaciones razonables cambian las conclusiones no se habrá adquirido suficiente evidencia experimental como para superar la incertidumbre inicial. Este problema debe ser resuelto con experimentación adicional.

Un procedimiento alternativo es dejar abierta la posibilidad de adquirir mayor información luego de haber adquirido cierta información adicional. (45)

Si se decide obtener mayor información, una vez conseguida se vuelve a computar el valor monetario esperado y el de pérdidas de oportunidad, con cuya información puede volver a decidirse si es necesario mayor información, esto puede repetirse hasta que el valor esperado de pérdidas de oportunidad del acto mejor, sea menor que el costo de información adicional.

El proceso de decisión es pues secuencial.

Las ventajas de este sistema, lo son en tanto en la función del costo de tomar la muestra que suponemos lineal $= a + b_n$,

en donde a es el gasto fijo y b el costo de cada respuesta, o sea el costo variable, la parte variable del costo sea mayor que la parte fija.

En resumen:

El valor de la información es el incremento del valor esperado causado por la información misma, o sea, la diferencia entre el valor esperado con las probabilidades a posteriori y el óptimo con probabilidades a priori.

El valor de la información es directamente proporcional a la dimensión económica de los problemas de decisión en que se utiliza y crece cuanto mejor se utiliza por el destinatario de la información; aumentando cuanto mayor es la incertidumbre a priori acerca del verdadero estado de la naturaleza y por el contrario es nulo en el caso de certeza a priori.

La información es una suerte de seguro contra los acontecimientos inesperados. Cuanto mayor es el riesgo económico en caso que se de un estado de naturaleza poco esperado, si se ha elegido la alternativa óptima conforme la información a priori, más valiosa resulta la información que ayude a disminuir ese riesgo.

Finalmente, el modelo es difícil de aplicar por cuanto debe estructurarse la matriz de decisión y la estimación de las probabilidades a priori.

Capítulo 5 - REFERENCIAS BIBLIOGRAFICASLibros

- 31- MORGAN Bayesian statistical decision processes, Cap.
1, 2, 3, 4, 5 y 6.
- 44- SCHLAIFER Probability and statistics for business decisions,
Cap. 21.
- 45- SCHMITT Measuring uncertainty, Cap.3.

Articulos

- 54- BERTOLETTI Economía de la información
- 83- MAGEE How to use decision trees in capital investments.

Capítulo 6 - ARBOLES DE DECISION

6.1 Secuencia de decisiones y árbol de decisión.

La actividad industrial no puede ser reducida a una decisión simple por cuanto las decisiones presente modifican las alternativas futuras. Por tanto debe considerársele como una secuencia de decisiones que se extiende desde el presente hacia el futuro. Para la consideración de decisiones secuenciales se recomienda el uso del árbol de decisión.

La premisa fundamental en todo árbol de decisión es que en base a la información disponible en el momento de la evaluación, se determina el curso a seguir, que será el indicado, si al momento de llegar a tener que tomar una decisión irrevocable, la información sigue siendo la misma. Deben localizarse los puntos de decisión con las diversas opciones para cada uno de ellos, así como también los puntos de incertidumbre y los diversos eventos posibles.

El árbol de decisión ayuda a determinar en cada punto de decisión la alternativa de la que se espera el beneficio mayor, previa ponderación de los ingresos con sus riesgos. Con la base del criterio de dominancia se van eliminando las ramas alternativas.

Si bien al momento en que se toma la decisión los resultados del evento no son conocidos es posible asignarles una distribución de probabilidades subjetivas.

La tarea del empresario es expresar numéricamente sus preferencias personales y su juicio personal acerca del peso de los factores que obran en favor y en contra de determinado evento. En las decisiones de simples problemas, como de otros sumamente complejos, el empresario debe ser consistente con sus preferencias y juicios personales. Esto no significa que se ignore la evidencia objetiva disponible, sino que por el contrario ésta forma parte de su actuar razonable.

Por medio de los árboles de decisión es posible tomar decisiones con muchos niveles y abundantes ramas en cada nivel, por cuanto cualquier problema de decisión, no importa su complejidad, puede ser reducido a cierto número de problemas, cada uno de los cuales tiene estructura similar a la descripta.

El empresario en cada una de estas estructuras simples debe cuantificar sus preferencias, determinando cual debe ser la magnitud de la probabilidad de obtener la orden necesaria para que decida tomar el riesgo y en su opinión, cual será la probabilidad de tener éxito.

Si el empresario sigue ciertos principios de conducta coherentes le es posible, por deducción lógica, encontrar la solución a su problema que sea consistente con sus preferencias y criterios. (26)

Debemos pues identificar el problema y sus alternativas, diseñar el diagrama, obtener los datos requeridos y evaluar los cursos alternativos. A menudo las evaluaciones llevan a reformular el árbol de decisión y permiten también determinar las alternativas más deseables con los estándares usados y su sensibilidad a cambios en estimaciones no muy seguras.

En la investigación de alternativas se deben efectuar análisis de ingeniería, de mercado y financieros que combinados con los resultados básicos de desarrollo posibilitan el estudio de alternativas. Costos y precios de venta, tamaño de la planta y turnos de operación, demanda y sus fluctuaciones, reacción de la competencia y los riesgos e incertidumbres de las variables, son estudios necesarios para la consideración de los proyectos de inversión.

En general para proyectos de cierta importancia es aconsejable el trabajo en equipo que reúna a especialistas de mercado, de producción e ingeniería y financieros.

El tiempo que debe cubrir el árbol de decisión es privativo de cada proyecto en particular y debe extenderse hasta el punto en el cual no reviste importancia significativa considerar un período más largo.

Es de destacar que el análisis se realiza en la forma conocida como inducción hacia atrás, dado que el análisis comienza en la parte final del diagrama de decisión y se retrocede hacia el origen reduciendo sucesivamente las ramificaciones y definiendo valores, ya sea asignando equivalentes de certeza a valores terminales inciertos o eligiendo el acto que tiene el valor de certeza mayor.⁽⁸³⁾

Llega un punto en que en un juego, no obstante el hecho de que los resultados igualmente probables son simétricos, teniendo un valor esperado de cero, la asignación particular de ganar o perder una misma cantidad de dinero no es simétrica y esto se acentúa cuanto mayores ganancias y pérdidas potenciales se consideren. Por ello, se aconseja el uso de equivalentes de certeza mediante el uso de curvas de preferencia que reflejen la actitud ante el riesgo del tomador de decisiones.

- 1.- Se convierten las consecuencias del juego en sus correspondientes preferencias.
- 2.- Se calculan las esperanzas matemáticas de esas preferencias y los resultados pasan a ser las preferencias por cada evento.
- 3.- De la curva de preferencia se obtiene el valor correspondiente a la preferencia anterior. Este valor es el equivalente en certeza del juego.⁽¹¹⁾

Resulta también muy conveniente igualar en el tiempo los flujos de fondos para hacerlos comparables.

En los árboles de decisión el descuento para calcular el valor actual debe efectuarse etapa por etapa, descontando los valores de posición y los flujos de fondos.

Ante la presencia de variables continuas se debe tratar de determinar límites discretos representativos de la incertidumbre.

Los flujos de fondos parciales aparecen en el diagrama de decisión en el orden en el que son conocidos por el tomador de decisiones y no necesariamente en el orden en el cual ellos realmente ocurrirán.

Debe considerarse que las decisiones del empresario que involucran incertidumbre, no dependerán del flujo de fondos del proyecto sino de las posibles situaciones financieras que puedan resultar de esos flujos de fondos. Por tanto se aconseja que los diagramas sean modificados para incorporar en ellos las posiciones finales teniendo en cuenta su posición financiera total.

A todo acto en cada punto de decisión del programa se le asigna un valor terminal definido y por ello el análisis se denomina evaluación de actos individuales.

Es necesario recalcar que otro empresario situado exactamente en la misma situación y en posesión de la misma información, puede tomar decisiones diferentes al considerar distintos equivalentes de certeza conforme con sus opiniones personales.

Es también conveniente puntualizar que si nuestro empresario, cuya decisión debería ser invertir en el proyecto A, observando el problema a decidir, resuelve intuitivamente no invertir, su decisión no es errónea. En realidad su decisión es lógicamente inconsistente con sus decisiones de asignación de equivalentes de certeza. Ello hace que sea aconsejable realizar ambas clases de análisis por cuanto solamente por este medio el tomador de decisiones podrá detectar y corregir sus inconsistencias.

El tomador de decisiones debe delimitar su problema de decisión y establecer a su criterio una fecha tope de evaluación más allá de lo cual

no vale la pena considerar las consecuencias de sus actos y eventos resultantes. Consecuentemente debe describir su problema en los términos que le sean conocidos, antes de llegar a la fecha de evaluación.

Un diagrama de decisión consiste en un conjunto de ramas interconectadas que representan, un acto que el empresario puede elegir o un evento del cual el empresario recibe información. Tanto los actos como los eventos deben ser mutuamente excluyentes o sea que no puede ocurrir más de uno o sólo puede ser elegido uno y deben ser también exhaustivos, en el sentido que en opinión del tomador de decisiones, alguno de ellos debe necesariamente ser elegido u ocurrirá. Esto permite excluir del diagrama actos que no se desea considerar y eventos que se cree no ocurrirán en la práctica.

El orden en el cual aparecen los actos y los eventos debe ser tal que el camino desde el origen del diagrama, hasta la base de cada ramificación sea la representación correcta de la información disponible.

El diagrama debe también mostrar: todos los actos inmediatos entre los cuales el tomador de decisiones debe elegir, todos los actos futuros y eventos inciertos a considerar, por cuanto ellos pueden afectar directamente las consecuencias de los actos inmediatos y todos los eventos inciertos que pueden afectar las futuras elecciones de actos y que indirectamente afecten las consecuencias de sus actos inmediatos.

Los abanicos pueden tener más de dos ramas como frecuentemente ocurre en diagramas de decisión, por cuanto es un problema de pura conveniencia la cantidad de representaciones posibles de un acto que deben ser usadas en un diagrama. En cuanto a los eventos se verá como, elegir entre una representación u otra, habilita al tomador de decisiones para juzgar en forma más efectiva la decisión.

Un diagrama necesariamente debe representar los posibles condicionantes en forma correcta, el orden el cual aparecen actos y eventos en

el diagrama, debe concordar con el orden cronológico en el cual serán hechas irrevocablemente las elecciones y sus incertidumbres serán resueltas.

Una vez que se ha construido un diagrama, se debe describir las consecuencias de todas las secuencias acto-evento.

Luego la descripción se reducirá a valores numéricos que constituyan una descripción condensada adecuada de la consecuencia.

La valuación monetaria de consecuencias no monetarias puede ser representada, p.ej.: por el valor monetario que tiene para el tomador de decisiones las matrices y herramientas que pueden resultar de su decisión de producir.

Se selecciona la diferencia entre los activos no monetarios que tendrá en una posición terminal dada y los activos no monetarios que tendrá en la posición terminal base, y se asigna un valor monetario a esa diferencia.

El valor de un activo en una posición terminal puede ser determinado por el precio por el cual ese activo puede realmente ser vendido - valor residual -, o por el precio el cual puede realmente ser adquirido - valor de reemplazo.

Al asignar valores a las diferencias entre activos no monetarios el tomador de decisiones debería imaginar que ya está en la posición terminal dada y en el proceso de comprar o vender esas diferencias.

Para analizar un problema de decisión por la evaluación de actos individuales, el tomador de decisiones trabaja de derecha a izquierda en el diagrama, reemplazando abanicos de eventos y actos terminales, por valores terminales definidos hasta tanto se hayan eliminado todos los posibles eventos y se haya asignado un valor terminal definido a todos los actos para llegar al acto en el origen del diagrama.

El árbol de decisión es una herramienta analítica sumamente útil para la toma de decisiones, al permitir poner en evidencia los riesgos, objetivos, alternativas y resultados de los proyectos de inversión. También hace evidente a veces la necesidad de mayor información.

Los árboles de decisión deben usarse para calcular aquellos problemas que involucran una secuencia completa de decisiones cuyas alternativas y su atracción relativa en una etapa depende de la decisión que se haya tomado en la etapa anterior. Es decir, las decisiones presentes modifican las alternativas futuras.

Es especialmente útil para introducción de nuevos productos, modernización de planta, estrategias de investigación y desarrollo.(82)

El uso del árbol de decisión permite combinar técnicas analíticas con una clasificación de la estructura del proyecto y establecer la importancia relativa de las distintas posibilidades y alternativas.

El árbol de decisión si bien no da una respuesta final al analista para la decisión de inversiones en condiciones de incertidumbre, ofrece la gran ventaja de hacer evidentes las alternativas en estudio, los eventos posibles y valorar las diferentes decisiones que pueden tomarse. Expone las alternativas en forma gráfica, más fácil de entender para la generalidad, que utilizando métodos analíticos más abstractos.

Al ordenar la información permite seguir el desarrollo lógico de decisiones enlazadas secuencialmente.

6.2 Diagrama de Decisión

No podemos hablar de un flujo parcial de fondos incierto considerado aisladamente y de su equivalente de certeza, por cuanto éste depende del contexto completo en el cual ocurre el flujo.

El diagrama de decisión debe representarse la fecha en la que la incertidumbre de un flujo parcial de fondos debe ser resuelta; por cuanto el tomador de decisiones puede condicionar la elección entre diversos actos posibles al monto real del flujo de fondos a esa fecha .

En problemas de decisión en los que es posible comprar información cuyo único uso posible es elegir entre dos actos, se simplifica el diagrama asumiendo que si la información se obtuviera, el tomador de decisiones actuará de acuerdo con sus indicaciones. Para que ello sea así se debe probar que toda estrategia completa de la que resulta un acto contrario a la información recibida es de hecho obviamente no-óptima, por cuanto sería tonto gastar dinero en obtener más información a menos que se esté decidido a actuar conforme con la información que se reciba. Es legítimo eliminar estrategias que obviamente no son óptimas.

Si bien el objetivo formal del que decide es elegir una estrategia completa óptima, su objetivo real es solamente elegir una estrategia que comience con el acto inmediato óptimo.

En general el tomador de decisiones comienza analizando un diagrama con enfoque de base que muestra las más importantes decisiones entre actos e incertidumbre acerca de eventos. Luego de un primer análisis, ciertas estrategias son consideradas desechables por ser evidentemente inferiores a otras y se pueden introducir variantes de aquellas que parezcan competitivas y considerar eventos adicionales que pueden afectar sus consecuencias.

Tomemos un ejemplo sencillo e ilustrativo:

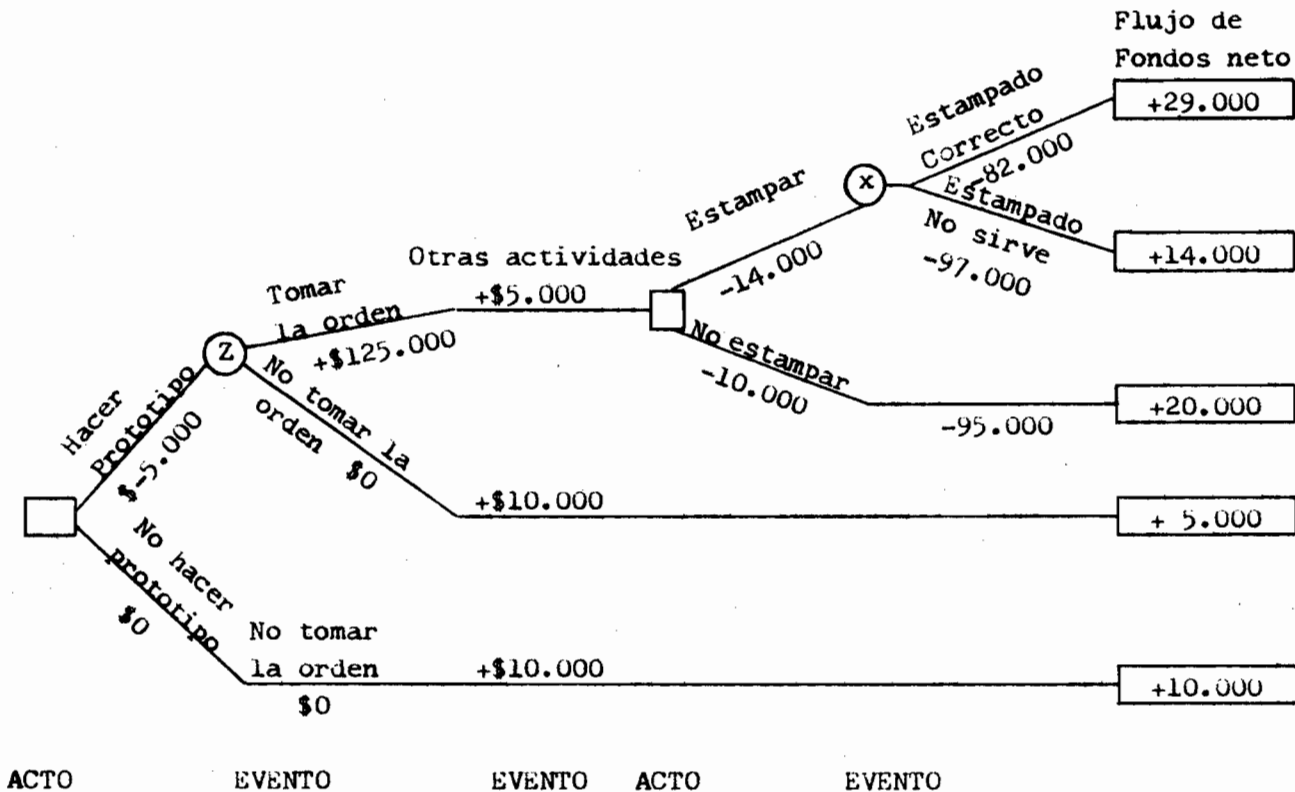
Una empresa para intentar obtener un pedido debe producir sin cargo un prototipo cuyo costo es de \$5.000.-

Si recibe el pedido vende 5.000 unidades x \$25 = 125.000.-

Si produce todas las partes maquinadas, se requiere gastar \$10.000.- de herramientas y 5.000.- x \$19 = \$95.000 de costo incremental. Si intenta estampar se requieren herramientas y matrices por \$14.000.- y el costo sería 5.000 x 16,40 = \$82.000.-, pero si el estampado falla debe gastar \$2.000.- adicionales en herramientas y el costo incremental es de \$95.000.-

Tomar el pedido le significa dejar de ganar \$5.000 en otros pedidos.

Si el empresario trata de afrontar directamente su problema de decidir si gasta \$5.000.- en un prototipo, debe considerar simultáneamente todos los factores involucrados, o sea: las probabilidades que el prototipo falle y la pérdida consiguiente de \$5.000.-; si el prototipo tiene éxito debe decidir si trata o no de efectuar el estampado y en caso afirmativo las probabilidades de tener éxito en su implantación.



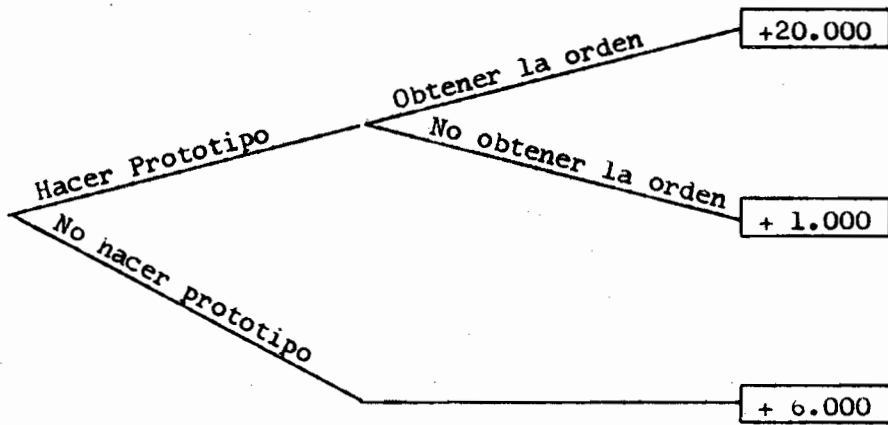
Los \$97.000.- puestos en "estampado no sirve" son los \$95.000 del costo incremental más \$2.000 de herramientas adicionales.

Si consideramos en nuestro ejemplo que en la posición financiera de las cuentas a pagar a corto plazo exceden las disponibilidades y cuentas a cobrar en \$4.000, los valores terminales disminuirán \$4.000 y

serán \$+25.000.-, +10.000.-, +16.000.-, +1.000 y +6.000 respectivamente.

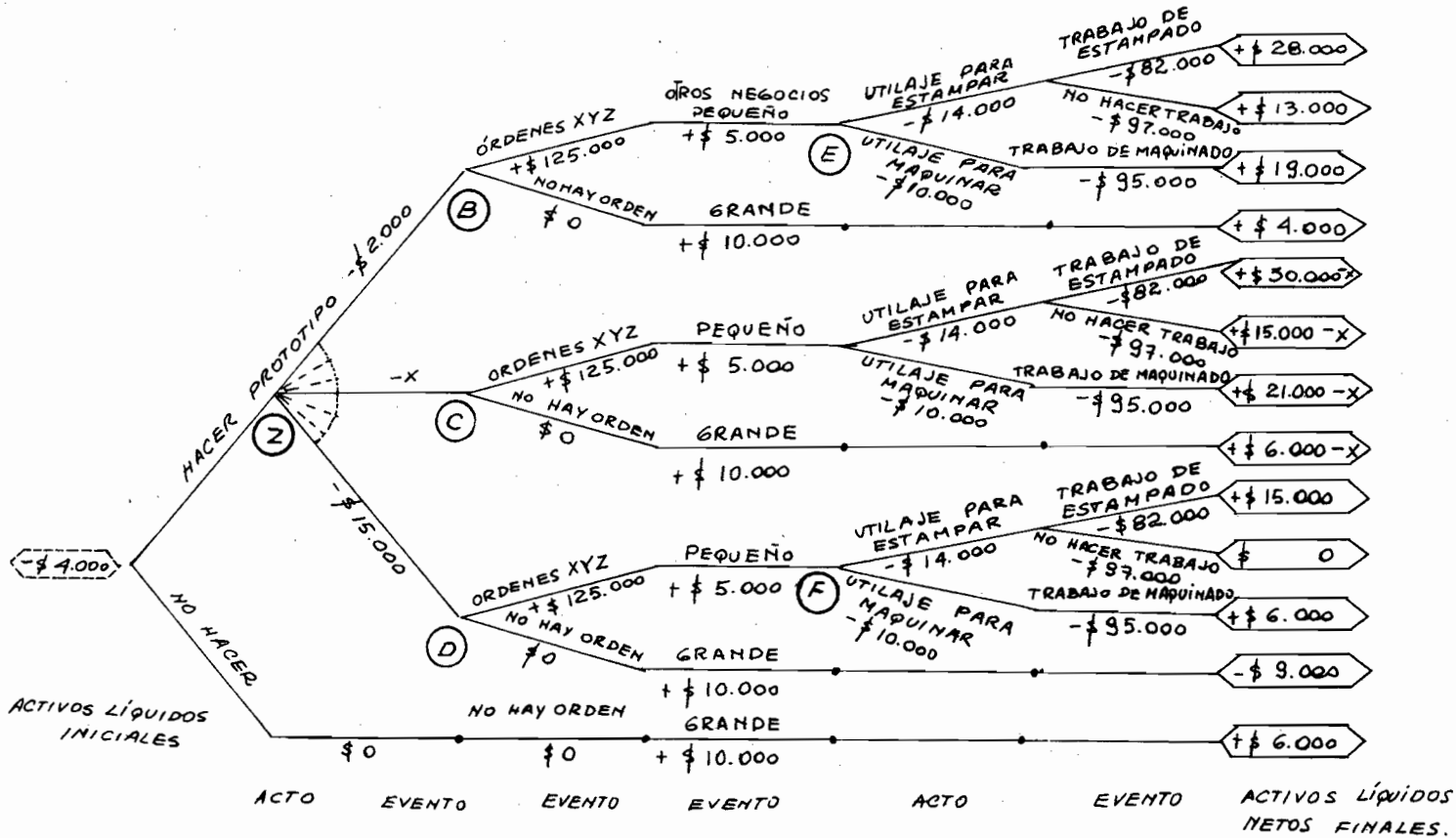
Supongamos que nuestro empresario puede tomar un contrato hipotético de seguro mediante el cual en caso que sus activos líquidos, como resultado de su intento de estampado, no alcancen a \$20.000.-, el asegurador le integrará el faltante hasta \$20.000.- y a su vez, si el estampado tiene éxito será beneficiario de todo exceso por encima de \$20.000.

Por este medio cuando el empresario llega a la posición *x* cambia su incertidumbre entre tener un valor terminal de \$25.000.- u otro de \$10.000.- y obtiene un valor terminal con certeza de \$20.000.- Debe entenderse que este valor terminal \$20.000.- es exactamente tan atractivo para el tomador de decisiones como el que resultaría de tomar el riesgo de efectuar el estampado por su cuenta. Como \$20.000 es mayor que los \$16.000.- que se lograrían sin hacer el estampado, se elimina esta alternativa y el problema queda reducido a tres valores terminales.

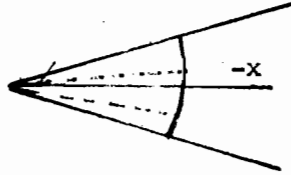


El empresario deb ahora decidir que valor terminal garantizado le sería indiferente con el riesgo de recibir \$20.000.-, si obtiene la orden o \$1.000.- en caso contrario. Si este valor es p.ej. \$9.000.-, sus valores terminales quedan reducidos a dos: +\$9.000.- si construye el prototipo y +\$0.000 si no lo hace y su decisión resulta obvia.

En caso que por ejemplo el costo del prototipo en estudio, en lugar de ser un importe único tomado en certeza de \$5.000.-, variara entre \$2.000.- y \$15.000.- el diagrama debe ajustarse introduciendo la incertidumbre sobre el costo del prototipo en el lugar adecuado como puede verse.



Cuando un abanico tiene un número muy grande de ramas, no es necesario representarlas todas. La incertidumbre puede ser representada adecuadamente por un abanico como éste:



en el cual x simboliza para cualquier valor posible, el flujo de fondos correspondiente. El diagrama deja de ser literal y se torna esquemático.

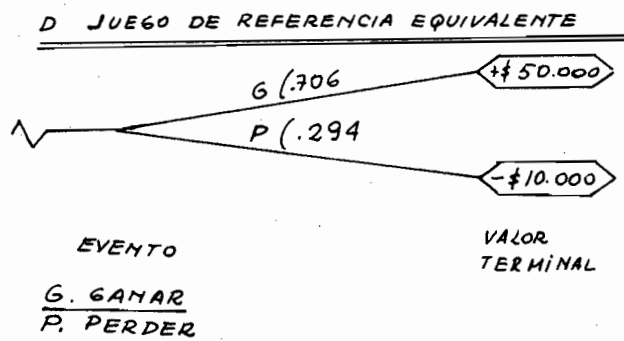
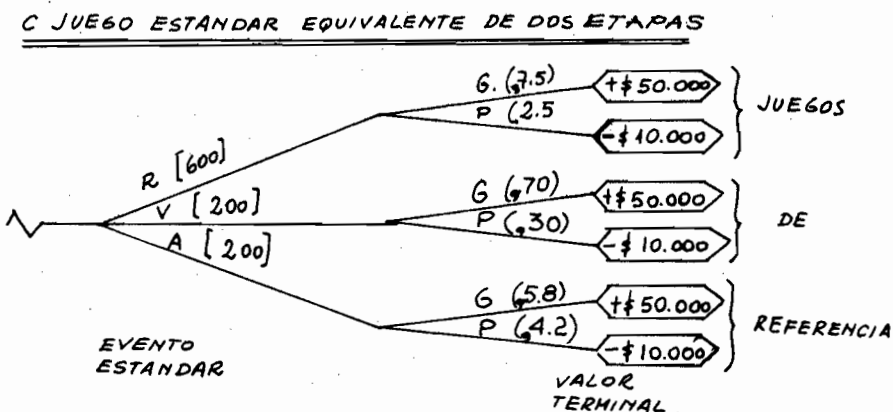
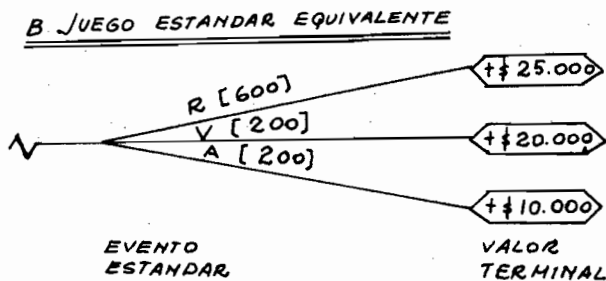
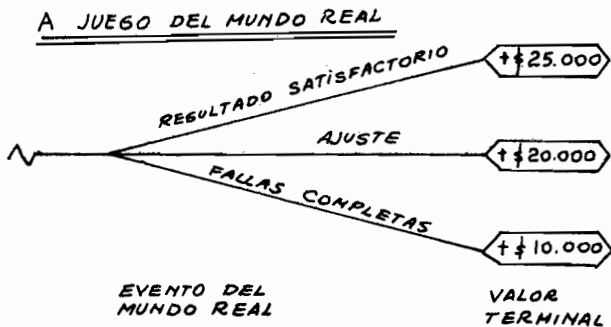
Es facultad del tomador de decisiones decidir qué considera un acto y lo que considera es un evento; esto es sumamente importante al tratar de eliminar la complejidad innecesaria en un diagrama.

Al definir los actos y eventos representados en el diagrama se establece el grado de detalle que se considera más adecuado para analizar el problema.

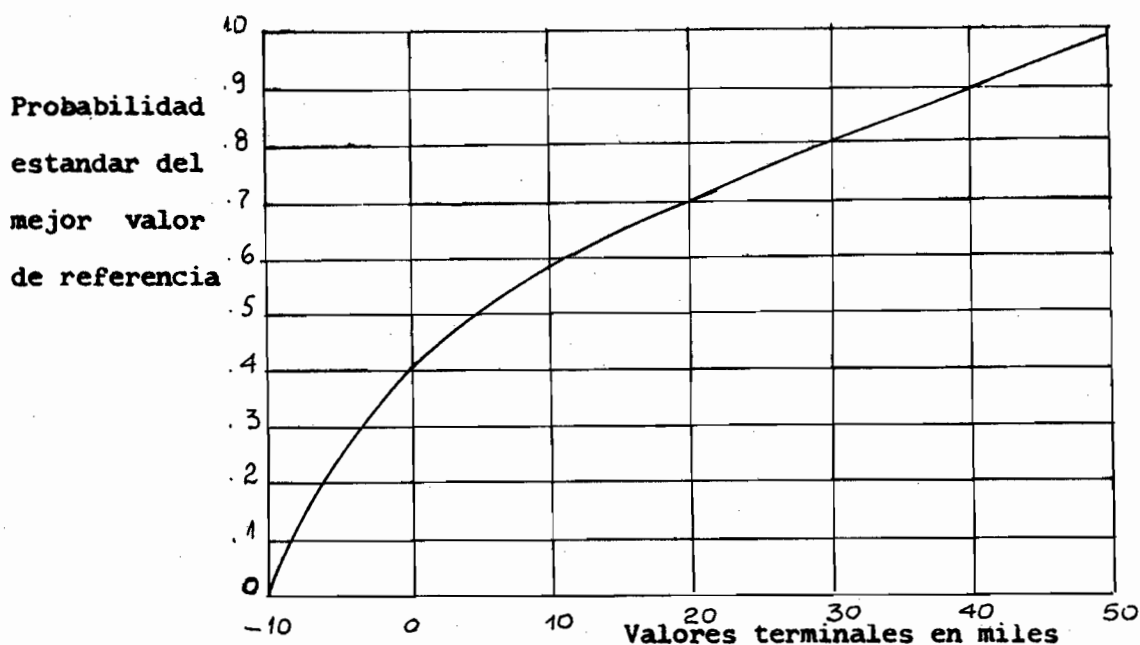
Así un abanico simple que represente un flujo de fondos incierto, puede ser usado para representar el efecto de un sinnúmero de actos y eventos más detallados.

Para una mejor comprensión definamos como "juego estandar equivalente" áquel en el que el tomador de decisiones es indiferente entre un juego que comprende un conjunto definido de consecuencias en un árbol de decisiones y un juego estandar que comprende esas mismas consecuencias exteriorizadas por una urna en la cual cada bola es identificada con uno de los eventos y la proporción de bolas asignadas a cada evento la hace equivalente.

Así vemos en la figura que B es equivalente a A, o sea, que se ha determinado el juego estandar equivalente B del juego del mundo real A.



Luego procedemos a usar los juegos de referencia, utilizando la teoría de utilidad para todos los valores terminales posibles entre el máximo y el mínimo (+\$50.000.- y -\$10.000.-). Así conocemos que nuestro tomador de decisiones es indiferente entre un valor terminal de \$25.000.- y un juego de referencia con probabilidad .75 de obtener \$50.000 y .25 de tener -\$10.000.- Para valores terminales de \$20.000 y \$10.000 el juego de referencia tiene probabilidades estandar de obtener \$50.000.- de .70 y .58 respectivamente.



Podemos ya considerar el juego estandar en dos etapas, C en la figura, que es exactamente equivalente a B.

Computando la probabilidad conjunta de obtener \$50.000.- y

\$-10.000.-

<u>Evento</u>	<u>Número de bolas y probabilidad</u>		<u>Probabilidad conjunta de +\$ 50.000.-</u>	
R	600	.60	.60 x .75 =	.450
V	200	.20	.20 x .70 =	.140
A	200	.20	.20 x .58 =	.116
	<u>1.000</u>	<u>1.00</u>		<u>.706</u>

Tenemos entonces que el juego de referencia equivalente tiene una probabilidad .706 de obtener \$+50.000 y una probabilidad complementario .294 de lograr \$-10.000, que corresponde a un valor terminal de \$21.000 para el tomador de decisiones según surge de su curva de preferencia $(25.000 \times .6) + (20.000 \times .2) + (10.000 \times .2)$

En resumen:

Hemos reemplazado cada evento del mundo real de un abanico por el correspondiente evento de un juego estandar usando la urna estandar del tomador de decisiones.

Hemos seguidamente reemplazado cada valor terminal por un juego de referencia equivalente que tiene dos valores terminales -el máximo y el mínimo de un abanico de eventos en consideración.

Luego, hemos computado las probabilidades conjuntas de los dos valores terminales extremos en un juego estandar de dos etapas. Ello nos ha permitido asignar el valor terminal equivalente en certeza.

Hemos denominado "preferencias del tomador de decisiones" a la probabilidad estandar de obtener el mejor valor terminal, que hace igualmente atractivo un valor terminal definido y a su vez este valor terminal definido es el equivalente de certeza de un juego de referencia, que tiene la probabilidad estandar citada de obtener el valor terminal máximo y la probabilidad complementaria de obtener el valor terminal mínimo.

Ni las probabilidades ni las preferencias deben ser consideradas como estimaciones que pueden ser erróneas o valores reales que existen aún cuando no sean conocidos. Las probabilidades y las preferencias son decisiones. El tomador de decisiones decide que sería indiferente entre un juego basado en esos eventos y un juego estandar. (43)

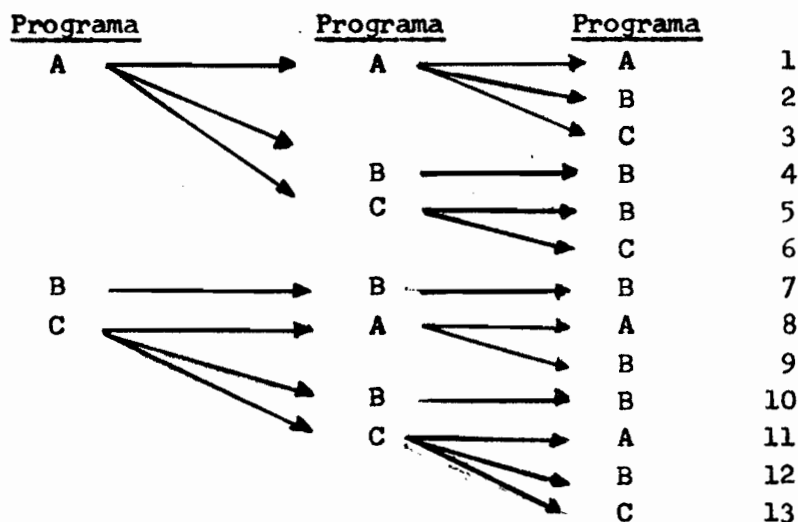
Tenemos ahora un ejemplo completo de aplicación práctica de un árbol de decisiones en el que se sigue el criterio del valor esperado matemático. Se tiene que decidir sobre una planta existente que ya no produce con la calidad requerida. Se estudian alternativas de modernizar la planta existente o construir una nueva con mayor capacidad. Se hace el estudio de la demanda y se conoce que la estimación más probable, da una venta que, partiendo de \$9 millones pasa a 12 millones a los 5 años y alcanza a \$18 millones al final de la década. La estimación pesimista parte de \$6 millones para llegar a 10 millones y la optimista representa seguir el incremento del mercado partiendo de \$12 millones para alcanzar a \$24 millones.

Las alternativas básicas son pues:

- A) modernizar la planta, expandiendo la producción en otra planta.
- B) Cerrar la planta.
- C) Modernizar y expandir la planta.

Se establecen tres etapas de decisión, cubriendo la etapa 1) tres años, la etapa 2) cuatro años y la etapa 3) tres años.

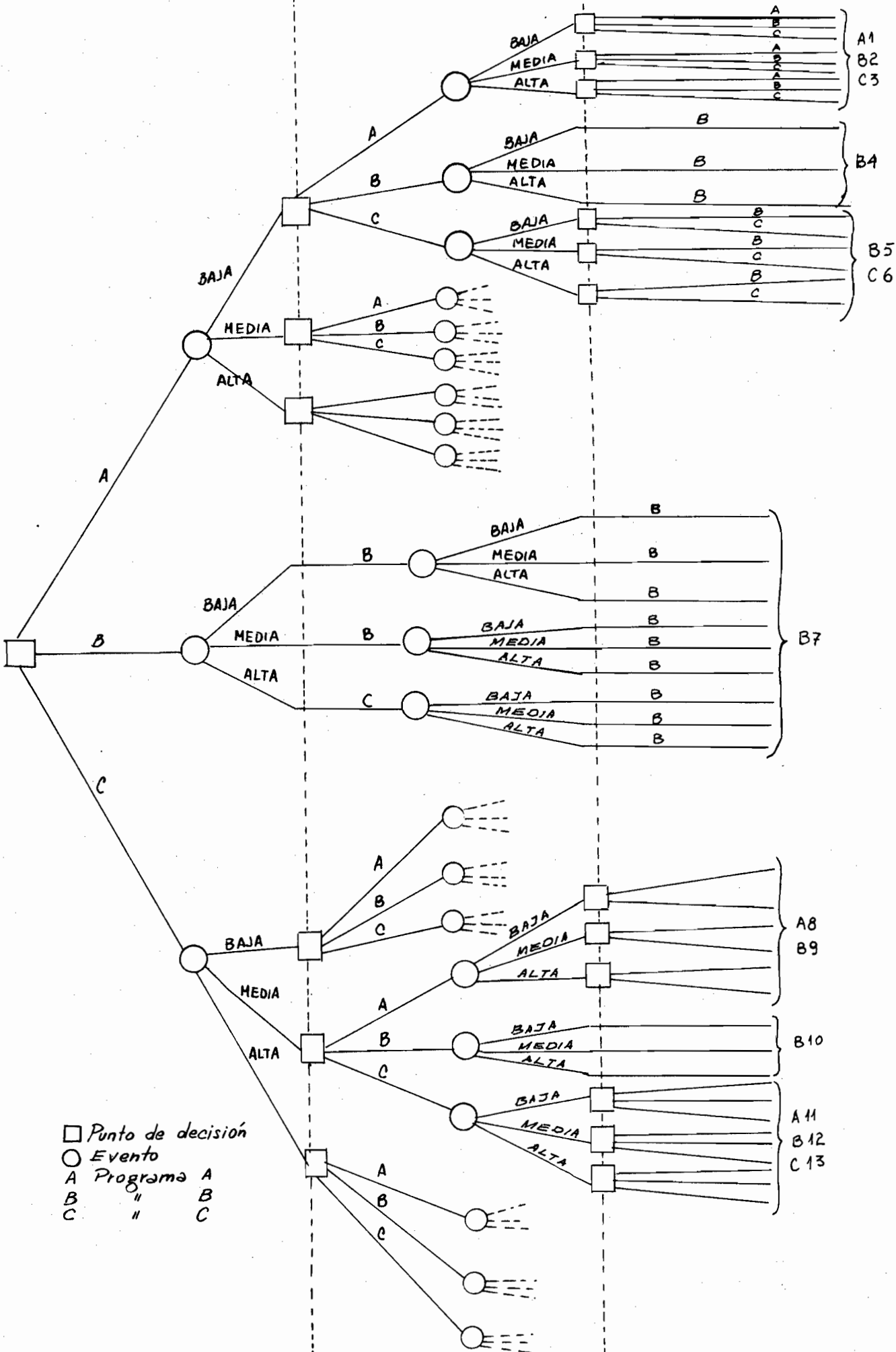
Analizando los costos se comprobó que el Programa A es el más económico hasta una demanda anual de \$10 millones, el B lo es para demandas anuales entre \$10 y \$14 millones y el C es el menos costoso para demandas anuales mayores de \$14 millones. Al existir tres programas, con tres etapas y tres niveles de demanda, los planes posibles son 27, pero 13 son realmente factibles a saber:



PRIMERA ETAPA - AÑOS 1-3

SEGUNDA ETAPA - AÑOS 4-7

TERCERA ETAPA - AÑOS 8-10



Se necesita conocer las probabilidades de ocurrencia de cada evento y los flujos de fondos de cada combinación de decisiones alternativas.

Las probabilidades de los eventos inciertos son en el mejor de los casos, el resultado de investigaciones realizadas por expertos, a veces debe recurrirse a estimaciones subjetivas del que tiene que tomar la decisión.

En síntesis como nunca llegan a ser totalmente probabilidades objetivas, podemos afirmar que las probabilidades de los eventos inciertos son subjetivas. Supongamos que en nuestro ejemplo el resultado de los análisis realizados por los expertos sea,

Probabilidades de la demanda

Nivel de la demanda	ETAPA 1	ETAPA 2			ETAPA 3		
		Si Etapa 1 es			Si Etapa 2 es		
		Baja	Media	Alta	Baja	Media	Alta
Baja-hasta \$10 millones	.50	.35	.15	-.-	.20	.05	-.-
Media-\$10/14 millones	.43	.50	.45	.40	.60	.35	.20
Alta-más de 14 millones	.07	.15	.40	.60	.20	.60	.80
	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Los flujos de fondos anuales netos son:

	<u>Nivel de demanda</u>		
	Baja	Media	Alta
	millones de \$		
Programa A	1.5	1.8	1.5
Programa B	1.0	2.0	2.8
Programa C	0.5	1.5	3.3

Los costos de la inversión original
millones de \$

		Costo posterior de conversión al Programa		
		A	B	C
Programa A	12	-.-	0.-	8.-
Programa B	14,75	-.-	-.-	-.-
Programa C	14	4.-	6.-	-.-

La tasa de descuento es del 14%, por ser el retorno deseado sobre la inversión o sea el costo de capital.

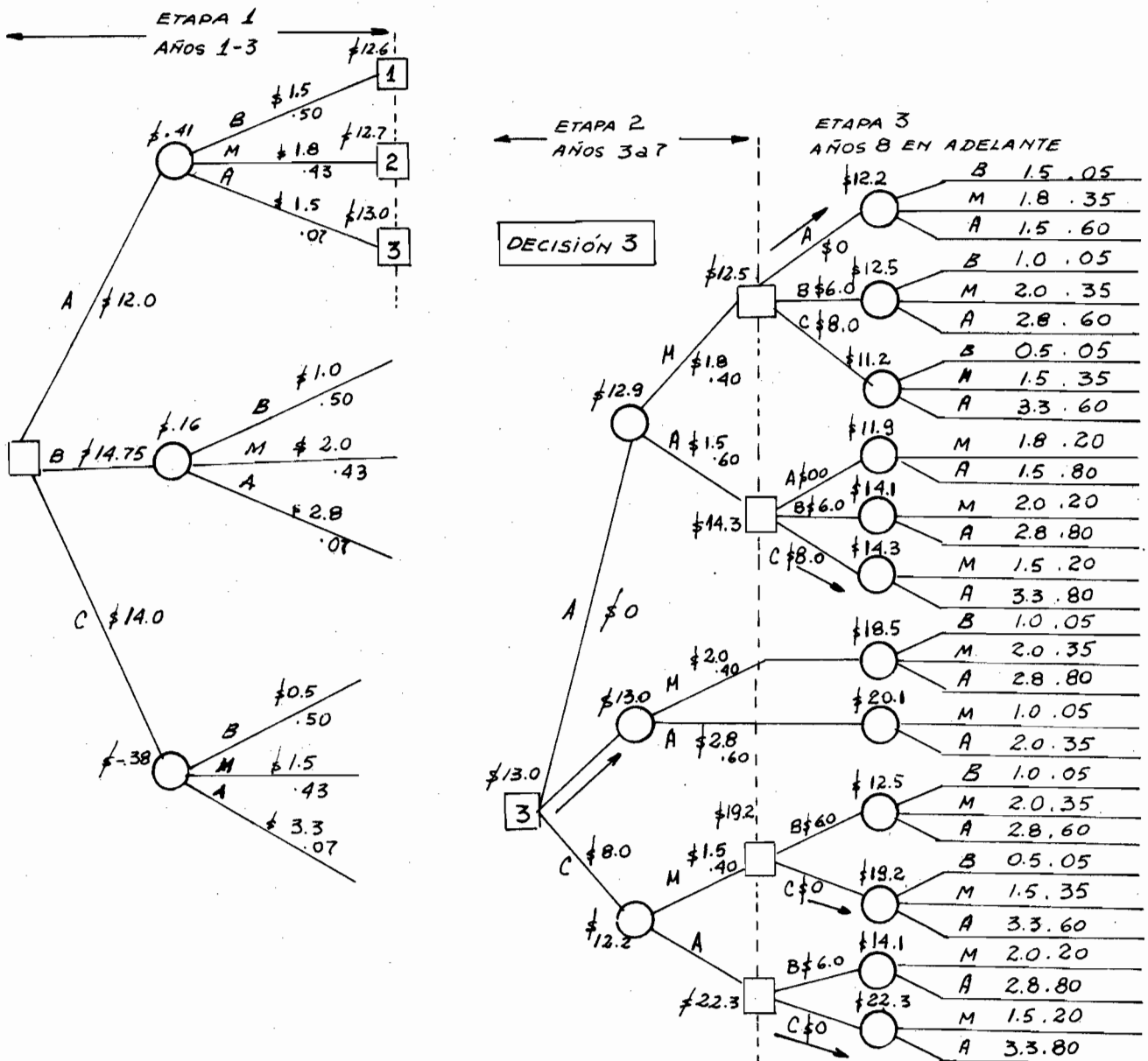
Las elecciones en cada punto de decisión se indican con las letras A-B-C. Las cifras que figuran al lado de las letras indican la inversión requerida. Los niveles de demanda factibles se indican en cada punto de evento como B = baja M = media A = alta.

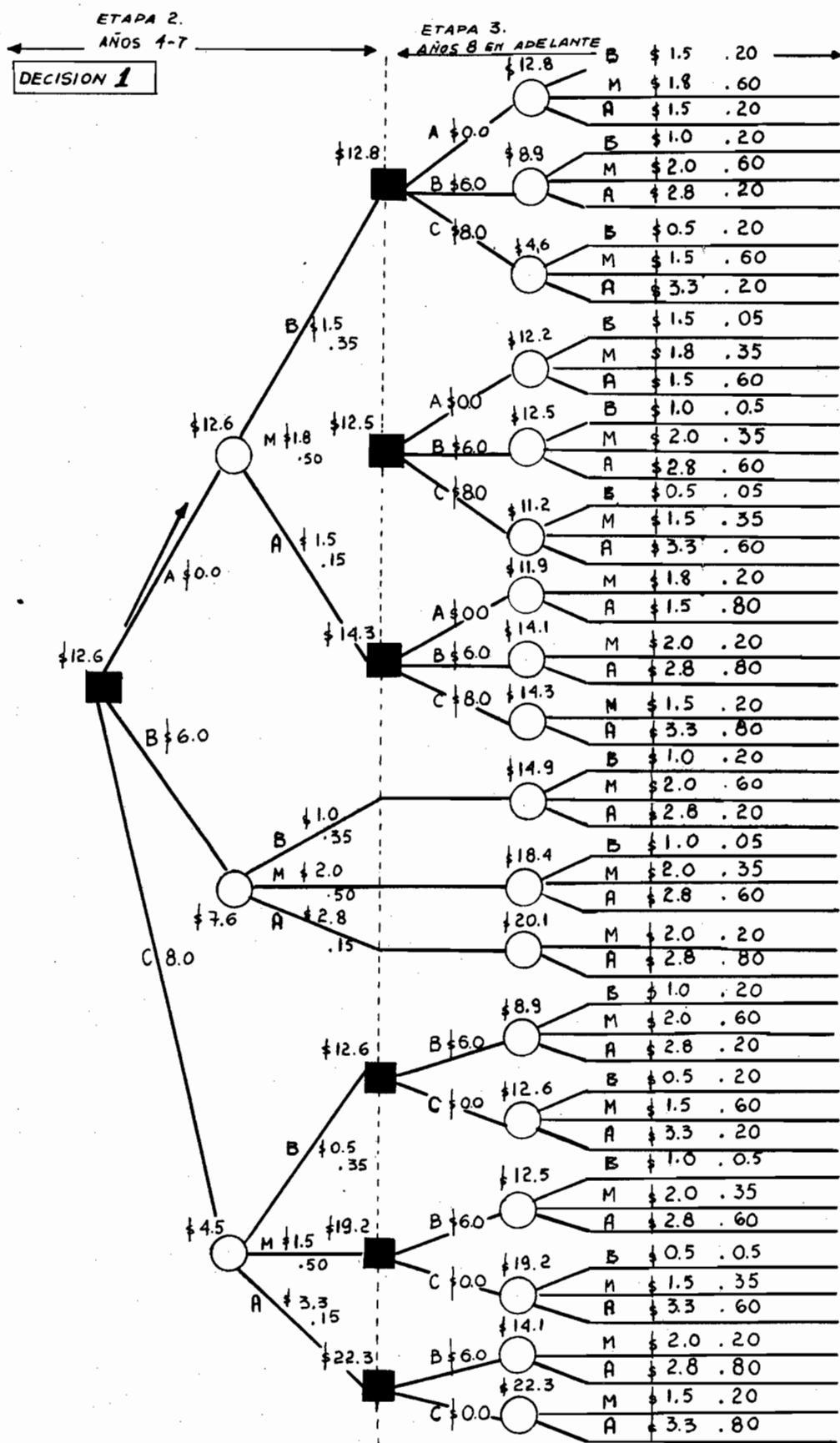
Dos juegos de números están al lado de cada nivel de demanda. La cifra en \$ es el flujo de fondos y la restante la probabilidad que se de ese nivel de demanda.

Los números al lado de los puntos de decisión \square y de los puntos de eventos \circ representan el valor actual neto al comienzo de cada etapa.

Las flechas apuntan hacia la alternativa con el mayor VAN.

PROGRAMAS ALTERNATIVOS Y SITUACIONES DE DECISION





Construyendo el árbol de decisión vemos que los tres programas combinados con las probabilidades de demanda en la etapa 1, llevan a seis situaciones de decisión al comienzo de la etapa segunda, juntamente con el programa B que no tiene decisiones en las etapas 2 y 3.

Se muestra luego el desarrollo de dos de las tres alternativas en las etapas 2 y 3 para el programa.

Para evaluar los valores terminales de cada alternativa seleccionamos aquella con el Valor Actual Neto más alto y asignamos ese valor a la posición, veamos el programa A con nivel de baja demanda, tanto en etapa 1 como en etapa 2; el VAN de las tres alternativas posibles en la etapa 3 es:

<u>Programa</u>	<u>Nivel demanda</u>	<u>Probabilidad</u>	<u>Flujo de fondos anual</u>	<u>Valor actual total</u>
			millones \$	
A	Baja	20	1.5	Factor 7.6(*) 2.3
	Media	60	1.8	8.2
	Alta	20	1.5	<u>2.3</u>
				<u>12.8</u>
B	Baja	20	1.0	1.5
	Media	60	2.0	9.1
	Alta	20	2.8	<u>4.3</u>
				<u>14.9</u>
C	Baja	20	0.5	0.8
	Media	60	1.5	6.8
	Alta	20	3.3	<u>5.0</u>
				<u>12.6</u>

(*) El valor de \$1.- por año recibido en períodos infinitos descontado al 14% anual sobre una base semestral es 7,6.

	<u>Resumen VAN de utilidades</u>	<u>Menos inversión por cambio a otro programa</u>	<u>VAN NETO</u>
	millones de \$		
Programa A	12.8	-.-	12.8
Programa B	14.9	6.0	8.9
Programa C	12.6	8.0	4.6

Se elige continuar con el programa A si la decisión en la etapa 3 tuviera que tomarse ahora.

Luego se evalua cada alternativa en la etapa precedente (etapa 2). Se toma el valor determinado para la etapa 3 como si se recibiera una suma global al final del período 2.

	<u>Millones</u>
En la decisión 1, el valor del programa A es	\$ 12,6
B es	\$ 7,6
C es	\$ 4,5

y la elección en la etapa 2 de la decisión 1 es programa A y su valor 12,6 millones.

Vemos que como resultado del proceso de inducción hacia atrás, los valores en la etapa 1, son:

Programa A	\$ 410.000.-
Programa B	\$ 160.000.-
Programa C	\$-380.000.-

El programa C no alcanza a reeditar el 14% del costo de capital y entre el A y el B se elige el A, por tener el mayor valor actual neto. Lo que no significa que se va a mantener el programa A en las etapas 2 y 3. Si la demanda es alta en la primera etapa se pasa al programa B por cuanto el punto de decisión 3 es al que se llega en caso de demanda alta y la decisión es pasar al programa B por ser el que tiene mayor VAN \$13,0 millones en la etapa 2 (tengase en cuenta que cuando en la etapa 1 la demanda es alta en la etapa 2 no puede ser baja).

Si la demanda es baja en la etapa 1, se sigue con el programa A en la segunda etapa; en la tercera etapa, se sigue con el programa A si la demanda fué baja en la etapa 2, se pasa a programa B en caso de demanda media y a C en caso de demanda alta.

Evaluando con otros métodos tales como el de flujo de fondos más probables, que nos daría demanda baja, media y alta para las etapas 1, 2 y 3 respectivamente, los datos serían (en millones de \$):

	<u>Inversión</u>	<u>Flujo anual de fondos</u>		<u>Años 8 en adelante</u>	<u>Valor actual neto 14%</u>
		<u>Años 1-3</u>	<u>Años 4-7</u>		
Programa A	12.00	1.5	1.8	1.5	0
Programa B	14.75	1.0	2.0	2.8	1.3
Programa C	14.00	0.5	1.5	3.3	2.1

El programa C sería elegible, pero no se ha tenido en cuenta que la demanda puede presentarse a otro nivel que no sea el nivel más probable.

Si se calcula el valor actual esperado, multiplicando los flujos de fondos por sus probabilidades de ocurrencia se llega a los siguientes valores.

Programa A	\$ 126.000.-
Programa B	\$ 160.000.-
Programa C	\$-380.000.-

El programa más favorable parecería ser el B, por este método no se tiene en cuenta la oportunidad que se tiene en el caso de elegir el plan A de modificarlo al fin de las etapas 1 y 2 conforme haya sido el comportamiento de la demanda. Es esa flexibilidad del programa A lo que lo hace más conveniente.(83)

5.3 Evaluación de estrategias completas

El análisis no es meramente la elección de un acto inmediato, es también la elección de un curso completo de acción o estrategia para manejar completamente el problema de decisión en consideración.

Estrategia es una regla que prescribe exactamente en la fecha de evaluación que acto será elegido en toda situación en que deba efectuarse una elección. Una de las estrategias implícitas es seleccionar una rama en el primer nivel de abanico de actos en el origen de un diagrama, hacer lo mismo en cada segundo nivel que está relacionado con la rama elegida en el primer nivel y continuar hasta que no haya más elecciones que hacer.

Todas las estrategias que están implícitas en el diagrama, pueden ser definidas siguiendo todas las secuencias de elecciones posibles en los abanicos de actos.

Una estrategia individual puede ser construir un diagrama individual para que cada una se refleje en un diagrama de decisión completo, con la excepción que no contiene ningún abanico de actos, sino que incluye ramas únicas de los actos prescriptos por la estrategia. Una vez diagramada las estrategias posibles es posible evaluar de derecha a izquierda en el diagrama y reemplazar los abanicos de eventos por sus equivalentes de certeza hasta eliminarlos y llegar a asignar a cada estrategia un valor terminal definido.

	<u>Valor neto terminal de activos de liqui dez corriente</u>
Estrategias implícitas en el ejemplo:	
I No construir un prototipo.	+ \$ 6.000.-
II Construir prototipo obtener la orden y no estampar	16.000.-
	no obtener la orden y parar + 1.000.-
III Construir prototipo obtener la orden y estampar	
	con éxito + 25.000.-
	sin éxito + 10.000.-
	no obtener la orden y parar + 1.000.-
<u>Primera reducción de estrategia III</u>	
III Construir prototipo obtener la orden y estampar	+ 20.000.-
	no obtener la orden y parar + 1.000.-

Segunda reducción de estrategia III

		§
III	Construir prototipo	+ 9.000.-

Luego simplificar estrategia II, que no fue evaluada en el análisis anterior; supongamos que su equivalente de certeza es +\$7.000.-, el resto ya pasa a ser puramente mecánico.

Supuesto que todos los equivalentes de certeza son lógicamente consistentes, el análisis por evaluación de estrategias completas debe guiar a elegir exactamente la misma estrategia y el mismo acto inmediato, que se habría elegido como consecuencia de la evaluación por actos individuales.

El diagrama de decisión debe mostrar todas las estrategias que el que decide desea considerar, caso contrario estará estructuralmente incompleto y debe también mostrar todos los eventos que pueden afectar el valor terminal asignado en la fecha de evaluación, si ello no ocurre estará valorativamente incompleto. (43)

6.4 Arbol de decisión aleatorio

Hespos y Strassmann proponen combinar las dos técnicas más modernas para el tratamiento del riesgo, análisis del riesgo mediante el uso de la simulación y los árboles de decisión, con el propósito de lograr las ventajas de ambas. (74)

El problema de la toma de decisiones secuenciales o sea, el análisis de una sucesión de decisiones de inversión interrelacionadas que se presentan en diferentes tiempos es uno de los pocos problemas que el análisis del riesgo no ha podido manejar bien aún.

La técnica de los árboles o diagramas de decisión es similar a la programación dinámica y es un método conveniente para representar y analizar una serie de inversiones a través del tiempo.

La cantidad de valores terminales en un árbol de decisiones aumenta muy rápidamente -en progresión geométrica- a los puntos de decisión y eventos y así las computaciones pueden volverse difíciles de manejar. Ello obliga a limitar el número de abanicos de eventos a unos pocos puntos de estimación, siendo la resultante inadecuada, en la medida que la distribución de probabilidades no son representativas del límite del evento.

El inconveniente de los árboles de decisión es que no dan información del límite de los posibles ingresos de la inversión o de sus probabilidades de ocurrencia.

El árbol de decisión aleatorio es similar al árbol de decisión convencional con las siguientes modificaciones.

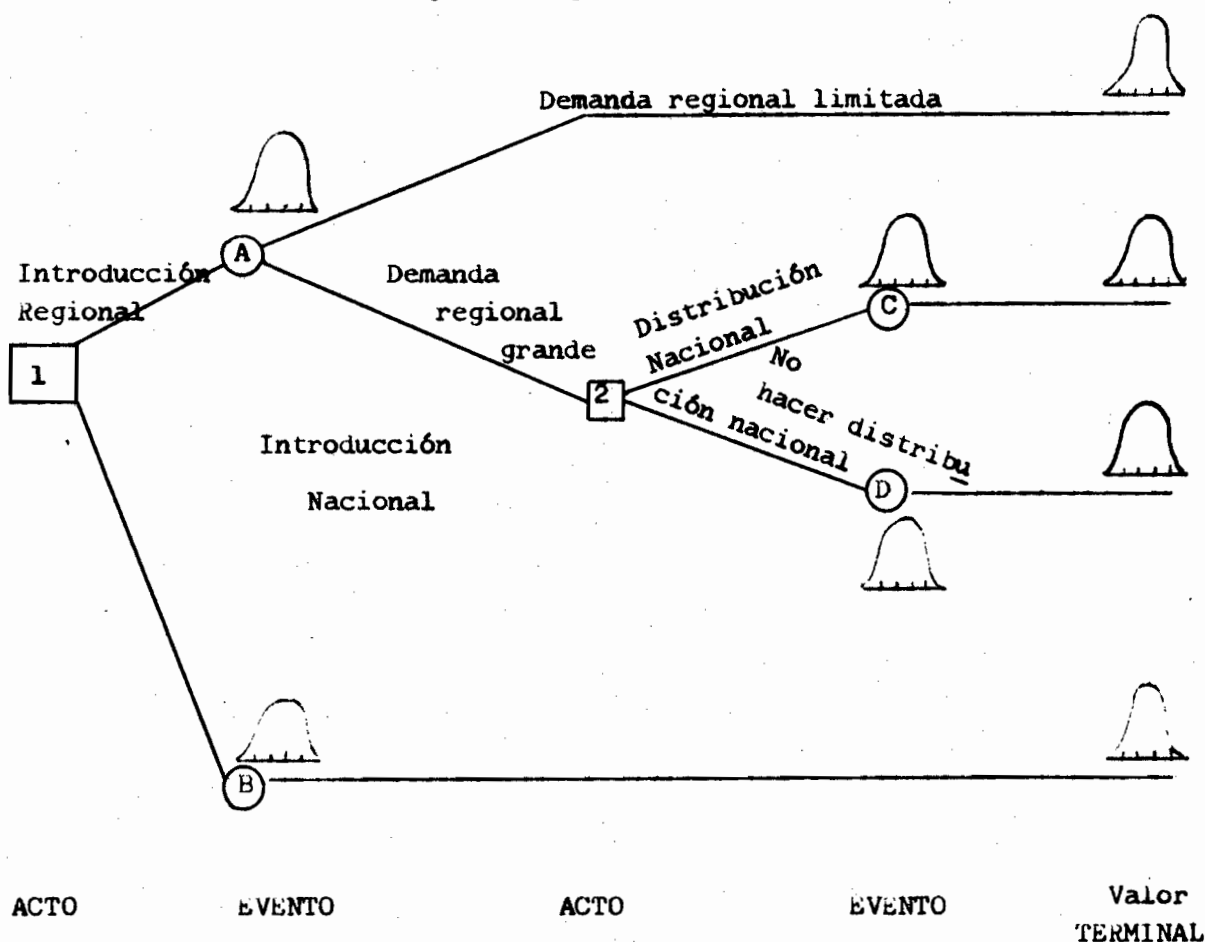
Todas las cantidades y factores incluso los eventos pueden ser representados por distribuciones continuas de probabilidades y los resultado de cualquier combinación posible de decisiones hechas en puntos secuenciales en el tiempo, pueden ser obtenidas en una forma probabilística.

La distribución de probabilidades de resultados posibles puede ser analizada usando los conceptos de riesgo y utilidad.

Dado que el árbol de decisiones aleatorio se basa en la simulación, no es necesario agregar un gran número de ramas al nudo de eventos. De hecho es posible reducirlo a una, eliminando el nudo de eventos y se hace una selección al azar en cada iteración con la apropiada probabilidad del modelo económico y el valor obtenido sirve para calcular el Valor Actual Neto de esa iteración particular.

Con esto se elimina la gran dificultad que se produce cuando hay muchas ramas por nudo complicando demasiado la computación.

Veamos el diagrama simplificado.



También se representa la inversión como una distribución de probabilidades. En cada iteración en la simulación se selecciona al azar, de la distribución apropiada, un valor para cada factor.

Este criterio simplifica la estructura del árbol de decisión -que es su mayor problema- haciendo factible evaluar todos los caminos posibles. Así en el árbol de decisiones convencional si hay cinco decisiones secuenciales con dos alternativas para cada decisión, hay 32 estrategias posibles (2^5), cantidad manejable con un computador, pero si las alternativas son cuatro, las estrategias posibles pasan a ser $4^5 = 1024 = 32^2$.

El método convencional de inducción hacia atrás trabaja necesariamente con valores esperados, al comparar a los grupos de decisiones por sus expectativas y seleccionando la mayor como la mejor. Como hemos visto en el criterio de análisis del riesgo, las decisiones no siem

pre pueden ser hechas basándose únicamente en un sólo valor esperado por factor. Es necesario evaluar todas las posibles estrategias.

En el nuevo criterio las distribuciones de probabilidades pueden ser comparadas solamente en base a sus expectativas -si ello es suficiente- y también pueden ser comparadas los conjuntos alternativos de decisiones, comparando las distribuciones de probabilidades asociadas a cada conjunto de decisiones, en una manera análoga al criterio de análisis del riesgo.

El análisis de todas las estrategias posibles se puede tornar laborioso, muy costoso y hasta impracticable.

Se pueden hacer en tales casos dos simplificaciones. Se utiliza una versión modificada de la inducción hacia atrás, eliminando ramas sobre la base de dominación de unas sobre otras, en vez de calcular el valor esperado. Tal el caso de eliminación de una simple rama que tiene Valor esperado más bajo y varianza mayor que otra rama alternativa.

Se puede también reducir la computación por medio de reglas de decisión anteriores a la computación, tales como la eliminación de todo evento cuyo valor exceda determinado criterio, por ej.: si la demanda no alcanza cierto valor específico no se utiliza la simulación para la decisión en el punto de decisión 2.

En cada iteración o trayectoria a través del árbol, cuando el computador encuentra un nudo con una decisión binaria a tomar, se instruye para que se separe en dos y se produzcan los cálculos necesarios a lo largo de las dos ramas del árbol que se originan en el nudo de decisión.

A nudos con tres o más ramas se les aplica la misma lógica.

Cuando el computador termina una iteración se habrá calculado un Valor actual neto para cada posible estrategia a través del árbol de decisión. Estos VAN son acumulados en distribuciones de probabilidades separadas. Cuando se completa un número apropiado de iteraciones, habrá una distribución de probabilidades de los Valores actuales netos asociados con cada conjunto de decisiones que es posible hacer al pasar a través del árbol. Estos conjuntos de decisiones pueden ser comparados entre ellos tal como se hace en el criterio de análisis del riesgo, como si se tratara de inversiones alternativas. O sea retorno esperado, forma de la distribución de probabilidades, efectos del riesgo y la utilidad.

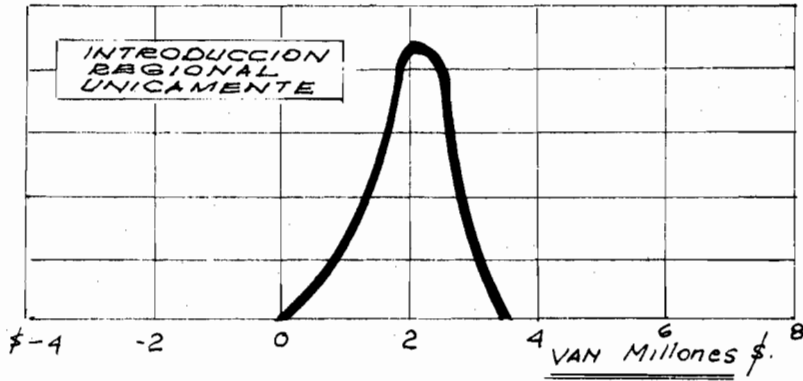
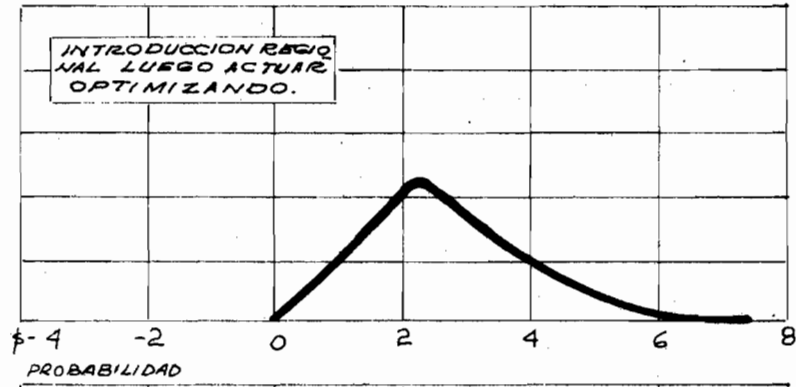
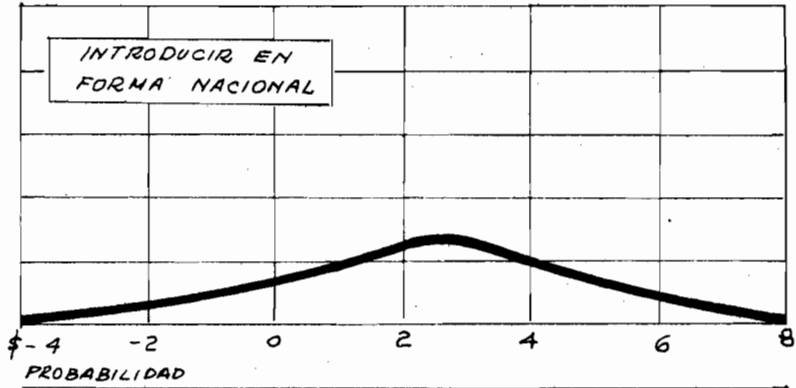
Las diferencias en los valores esperados se ven en la perspectiva adecuada y los valores esperados de estas distribuciones no deben necesariamente ser idénticos con los resultantes del análisis convencional de árbol de decisión, por cuanto en éste último criterio no se consideran las interdependencias entre las variables y el pequeño número de estimaciones usados para aproximar una distribución de probabilidades en el criterio convencional, no utiliza toda la información disponible.

El tomador de decisiones elegirá la alternativa más consistente con su actitud frente al riesgo y su utilidad personal.

En el ejemplo de la introducción de un nuevo producto, se ha resuelto por el nuevo método y se muestra a continuación:

RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE ÁRBOLES DE DECISIÓN ALEATORIAS.

PROBABILIDAD



En resumen, las etapas para recolectar datos son:

- 1) Reunir las estimaciones de probabilidades subjetivas de los factores apropiados.
- 2) Definir y describir cualquier interdependencia significativa entre esos factores.
- 3) Especificar la probable vida útil de la futura decisión de inversiones secuencial.
- 4) Especificar el modelo a usar para evaluar la inversión.

El criterio del árbol de decisiones aleatorio es un adelanto sobre métodos anteriores para el análisis de inversiones, al combinar las ventajas, eliminando las desventajas de los criterios de análisis del riesgo y árbol de decisión y resultando su aplicación más fácil.

Capítulo 6 - REFERENCIAS BIBLIOGRAFICASLibros

- 4- BIERMAN Financial Policy Decisions, Cap. 4.
- 11- FARRAR & MEYER Managerial economics, Cap. 5.
- 13- GRAYSON Decision under uncertainty, Cap. 11.
- 23- MAO Quantitative analysis of financial decisions, Cap. 8.
- 33- NAA Decisiones de reemplazo de equipos, Apéndice D.J. Messuti.
- 36- PRATT, RAIFFA & SCHLAIFER Statistical decision theory, Cap. 1 y 6.
- 40- ROBICHEK Investigaciones y decisiones financieras, Cap. 5 - C.J. Grayson.
- 43- SCHLAIFER Analysis of decisions under uncertainty, Partel.
- 50- VAN HORNE Financial management and policy.

Artículos

- 71- HAMMOND Better decisions with preference theory.
- 74- HESPOS & STRASSMANN Stochastic decision trees.
- 82- MAGEE Arboles de decisión
- 83- MAGEE How to use decision trees.

Capítulo / - CONSIDERACION DE MULTIPLES VARIABLES - SIMULACION/.1 Variables múltiples y simulación.

La evaluación de un proyecto se basa en el rendimiento del capital invertido, que se mide descontando los flujos de fondos del proyecto y su comparación se ve dificultada por las diferencias en la magnitud y duración de la vida de cada proyecto.

Los cálculos provenientes de las ecuaciones respectivas no resultan exactos a pesar de parecerlo, por cuanto los datos básicos generalmente son estimaciones más que datos exactos. Por ello no resultaría aconsejable basar las decisiones de inversión en la comparación de las tasas únicas de retorno, por tratarse de valores promediados esperados con diferentes probabilidades de variación. Si hay algo que no es conocido con exactitud, salvo excepciones, es la vida útil del proyecto, sin embargo es un dato determinante de la tasa de retorno y su mayor o menor extensión produce cambios sensibles en ella.

Hertz menciona que un proyecto de lanzamiento de un producto comestible cuyas cinco variables determinantes son gastos de promoción, mercado total del producto, participación en el mercado, costos operativos e inversión requerida, rendía el 30% anual sobre la base de las estimaciones más probables para cada una de ellas. Sin embargo asignando a cada una de esas estimaciones una probabilidad alta -60%- la probabilidad combinada de que resulten ciertas las cinco es algo menor del 8%, o sea, que tales estimaciones para calcular una única tasa de rendimiento, no presentan un panorama completo ni mucho menos, por cuanto la probabilidad que el rendimiento difiere del 30% es de 92%.

No resulta suficiente considerar los pronósticos en tres niveles o sea tomando valores altos, medios y bajos de los factores estimados y calculando las tasas de rendimiento resultantes según las combinaciones de esas estimaciones.

Si bien se obtienen los extremos de variación de los resultados no nos indican el peso o probabilidad relativa de cada uno de ellos.

Igualmente se desechan por Hertz los enfoques de Grant y Bennion para la determinación de una cifra de rendimiento probable considerando un sólo factor aleatorio, respectivamente la vida económica del proyecto y la expansión del mercado, por cuanto no destacan la extensión del riesgo asumido ni la esperanza de los rendimientos esperados(72).

En la vida real es muy factible que exista una combinación de buenos, regulares y malos resultados parciales, incorporados al resultado final, dependiendo del grado de probabilidad del valor dado de cada variable, la manera en la que estos factores se combinan en circunstancias particulares.

Es necesario pues preparar para cada uno de los factores relevantes una curva de distribución que muestre la probabilidad de cada valor dado para ese factor.

El uso de computador a la solución de este tipo de problemas permite un aumento considerable del volúmen de datos en condiciones de ser incorporados al proceso. Así en vez de tomar una cifra de ingreso, se incluyen todas las variables que contribuyen a formarlas, evaluando sus datos en forma independiente. Algunos de estos factores pueden estar interrelacionados y ello debe ser incorporado al modelo. (55)

Los modelos financieros pueden ser simulados en forma parecida a los túneles para probar modelos de aviones.

Se efectúan una serie de pruebas en un modelo simulando las condiciones del mundo real, bajo las cuales se espera que se produzcan, lográndose una secuencia de resultados que podrían verificarse si el modelo fuera adoptado con miras a la toma de decisiones.

Se logra el resultado que se obtendría si en el mundo real las variables se hubieran comportado en esa forma. Repetidos cálculos en la medida adecuada producen una distribución de los distintos resultados, proporcionando las consecuencias esperadas de los distintos cursos posibles de acción.

El proceso de simulación puede originar correcciones en el modelo y nuevas simulaciones repetidas veces.

Es muy útil en aquellos casos que es muy difícil obtener los resultados de un modelo por medio analíticos. La simulación se usa para verificar un modelo, por cuanto verificar previamente una decisión por medio de su ejecución real, puede resultar costoso. Lo más importante es establecer las variables con su distribución de probabilidades. Por este medio se obtienen las consecuencias que resultan de las diversas alternativas de decisión, sin que para ello se haga necesario llevarlas a la práctica.

Recordemos que una distribución acumulativa de probabilidades, nos da también la distribución de probabilidades de un cierto intervalo, tomando la diferencia entre las distribuciones acumulativas de probabilidades que corresponden a sus extremos.

Consideremos un caso simple que nos diga que las cifras de demanda sean \$500 con probabilidad .3, \$600 con probabilidad .5 y \$700 con probabilidad .2. Se asignan en una serie de dos dígitos, treinta dígitos (P.ej.: del 00 al 29) al primer nivel de demanda, cincuenta dígitos (del 30 al 79) al segundo nivel y veinte dígitos (del 80 al 99) al tercer nivel. Luego al azar se van extrayendo cifras de dos dígitos y conforme al número que resulta en cada extracción, se va asignando el correspondiente nivel de demanda. Cada cifra de dos dígitos es equiprobable. La idea central de la simulación consiste en generar observaciones al azar. El número de pruebas depende de la cantidad de evidencia requerida para convencer al tomador de decisiones de la efectividad del modelo. (3)

Las distribuciones de probabilidades que se toman para cada variable son generalmente probabilidades subjetivas.

En el uso de la técnica Monte Carlo, la única dificultad es la de asegurar que la distribución de los valores de cada variable, obtenidos por selección al azar, sea consistente con la distribución elegida para el análisis (19).

En opinión de Hertz al empresario le resulta necesario disponer de una representación evidente de los cambios en los rendimientos resultantes de la variabilidad de los factores relevantes. (72)

Hertz da un ejemplo práctico de una industria que estudia una ampliación de planta de \$10 millones, con una vida económica de 10 años, se espera procesar 250.000 toneladas anuales con un costo medio estimado de elaboración de \$435 por tonelada y precio de venta por tonelada \$510.-

El análisis del rendimiento se basa en el estudio de nueve variables agrupadas en tres categorías:

a) Análisis del mercado

- 1) Dimensión del mercado
- 2) Tasa de crecimiento de la demanda
- 3) Participación de la empresa en el mercado.
- 4) Precios de venta.

De cada combinación de estos cuatro factores resulta un nivel de ingresos por ventas.

b) Análisis del costo de la inversión

- 5) Inversión necesario
- 6) Valor residual de la inversión
- 7) Vida económica del proyecto

c) Costos de producción y ventas

8) Costos variables

9) Costos fijos

Por medio de reuniones de análisis de las distribuciones de frecuencia, los expertos arriban a respuestas más reales que utilizando nada más que los informes escritos. Aunque la estimación sea altamente subjetiva, la estimación que resulta de los posibles límites de variación de cada factor resulta mucho más efectiva que la estimación de un único medio estimado. Con ello se logra obtener información de todo lo que se conoce y todo lo que se ignora sobre las variables fundamentales, al tiempo que permite expresar sus dudas a los responsables de las estimaciones.

Al efectuar el cálculo deben considerarse ciertas restricciones realistas.

Considerando el método tradicional y el de análisis de riesgo tenemos:

	METODO TRADICIONAL		ANALISIS DE RIESGO	
	Valor medio o más Probable	Valor medio o más Probable	Límite Mínimo Probable	Límite Máximo Probable
Investigación del mercado:				
(en toneladas)				
1. Dimensión del " ...	250.000	250.000	100.000	340.000
(en \$ por tonelada)				
2. Precios de venta ...	510	510	385	575
(en %)				
3. Tasa de expansión anual del mercado	3,0	3,0	0,0	6,0
4. Participación en el mercado	12,0	12,0	3,0	17,0
Análisis del costo del proyecto:				
(en millones de \$)				
5. Inversión total	9,5	9,5	7,0	10,5
(en años)				
6. Vida útil	10	10	5	15
(en millones de \$)				
7. Valor residual al término de su vida útil	4,5	4,5	3,5	5,0
Otros costos:				
(en \$ por tonelada)				
8. Costo directo de producción	435	435	370	545
(en miles de \$)				
9. Costo fijo mensual.	300	300	250	375

Nota:

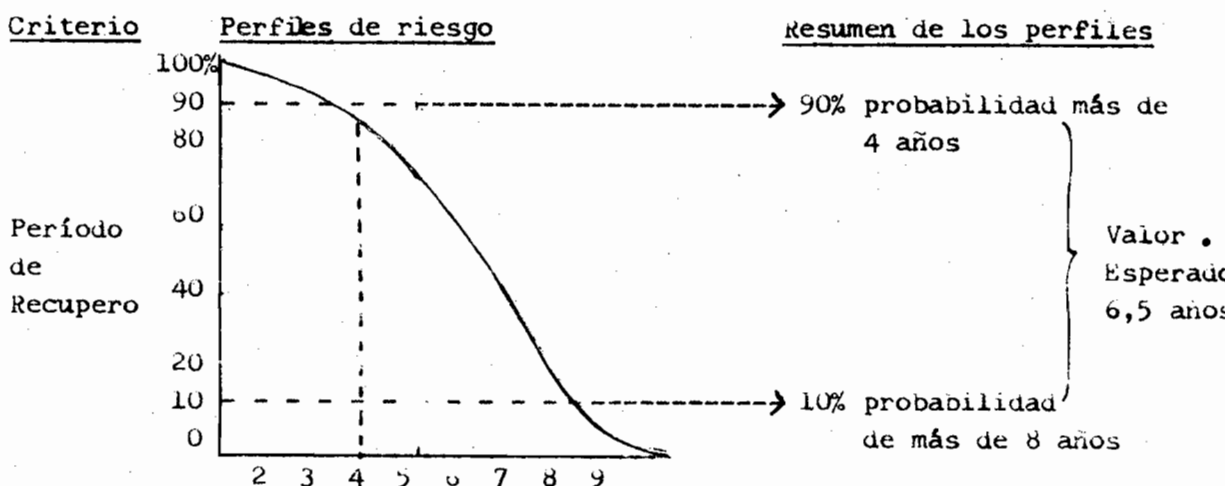
La probabilidad de exceder los límites mínimos o máximos indicados, es del orden del 1 %.

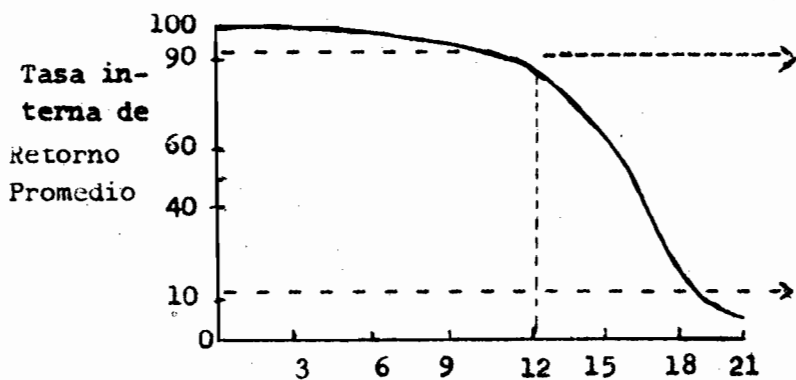
El programa permite verificar la sensibilidad de los resultados ante modificaciones de la frecuencia de distribución de uno de los factores y repitiendo con ella las simulaciones, lo que permite detectar el efecto de cambiar o agregar información. Por este medio se descubre que factores influyen sobre el resultado y cuales otros aún modificandose ampliamente no provocan cambios sensibles en los resultados. Una vez conocidas las variables fundamentales puede estudiarse la conveniencia de obtener mayor información sobre ellas.

En el ejemplo, el rendimiento tomando los valores más probables de las variables era del 25,2 %, en cambio el rendimiento esperado era del 14,0 %, con la siguiente distribución.

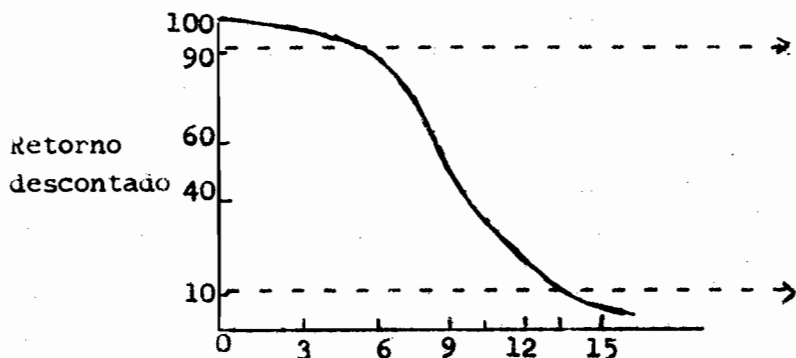
<u>Tasa de rendimiento</u>	<u>Probabilidad de que el rendimiento no baje de lo indicado</u>
%	%
0	96,5
5	80,0
10	75,2
15	53,8
20	43,0
25	12,5
30	0,0

Análisis de riesgo utilizando criterios diferentes.





90% probabilidad de más de 12% } Valor Esperado 15%
 10% probabilidad de más de 19%

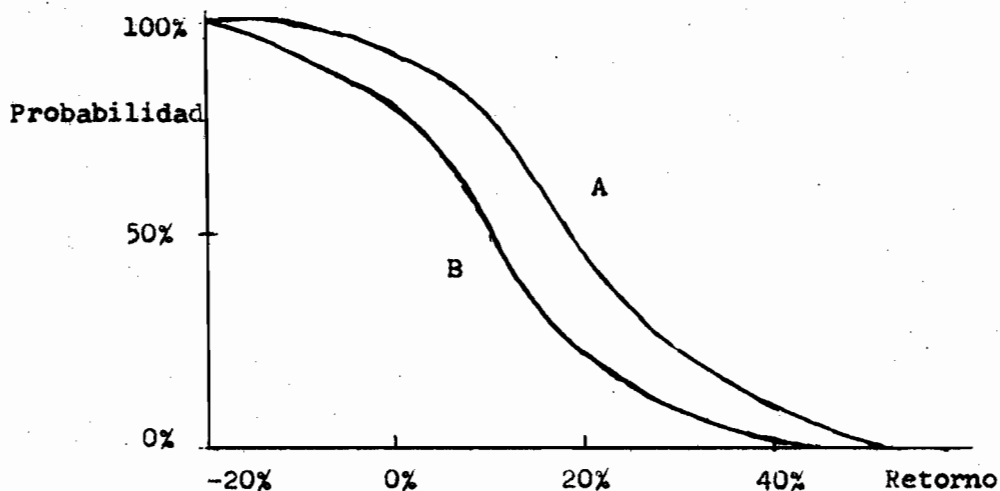


90% probabilidad más de 6% } Valor Esperado 10,8%
 10% probabilidad de más de 13,5%

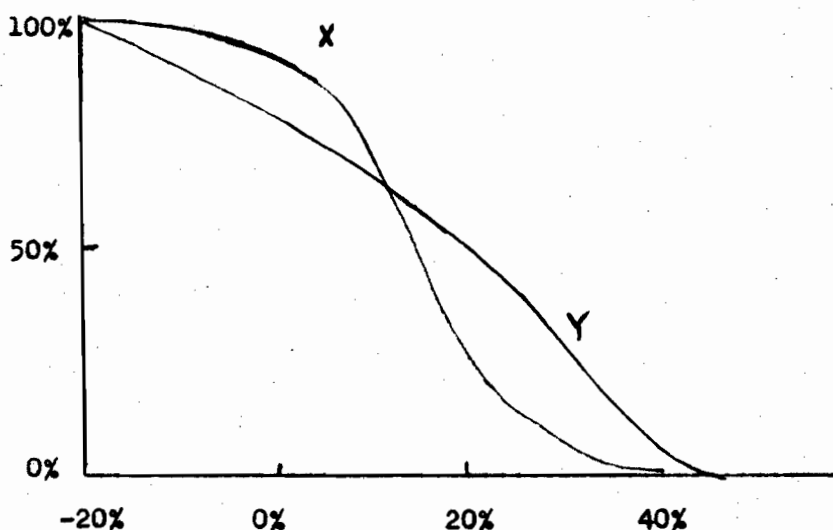
* Valor promedio de todos los ingresos posibles.

Hertz muestra los perfiles de riesgo obtenidos usando los sistemas de período de recupero, tasa promedio de retorno de la inversión y tasa interna de retorno, en una inversión determinada.

En la comparación del perfil de riesgo de dos inversiones la elección puede resultar obvia por cuanto una de ellas ofrece para todo nivel de retorno una mayor probabilidad. Así vemos que la inversión A es preferible a la B.



En caso que una alternativa de inversión no sea siempre dominante se ve en la comparación de las inversiones x e y.



La inversión X tiene mayores probabilidades de lograr 10% de retorno pero menores de lograr 40%. La cuestión de seleccionar la inversión y como establecer una política para guiar la elección no tiene hasta el presente respuesta.

Una política de inversiones consistente y adecuada, indica en el corto plazo que inversiones deben ser elegidas para alcanzar a cubrir los objetivos financieros de la firma. En el largo plazo da bases para identificar o desarrollar alternativas de inversión idóneas para alcanzar las políticas seleccionadas. Cumple la doble función de servir de base para obrar sobre alternativas de inversión y para transmitir experiencia acerca de ellas.

La política de análisis de riesgo determina hasta que punto el empresario cambia la probabilidad de un retorno no muy alto, pero con la certeza de no tener pérdidas, por alternativas con límites extendidos entre mayores utilidades unido a posibles pérdidas.

Una política específica en esta línea permite realizar elecciones consistentes de inversiones.

P. ej.: Una política de inversiones basada en el riesgo.

- 1) El criterio a ser usado para medir la inversión.
Retorno sobre la inversión (antes de impuestos), sobre la base de flujos de fondos descontados.
- 2) Reglas a utilizar para seleccionar inversiones, basada en los perfiles de riesgo de las propuestas.

Las propuestas deben tener:

- Valor esperado del 5% o mayor.
- 10% de probabilidad que la tasa interna de retorno exceda el 25%.
- 90% de probabilidad que la tasa interna de retorno exceda el 10%.

Es opinión generalizada que cuanto más excede el retorno su valor esperado, más también puede disminuir.

Una política de inversiones facilita al empresario hacer conocer por adelantado, a aquéllos que deben preparar las propuestas de inversiones, que clase de proyectos busca la empresa y que riesgos se consideran aceptables para afrontar.

Este análisis no indicará cual es la mejor política de inversiones; o sea, que impacto produce la elección de un criterio particular, tal como período de recupero, valor actual neto, retorno promedio sobre la inversión, y las diferencias entre inversiones de alto riesgo y de bajo riesgo.

Los empresarios quisieran tener políticas de inversión que maximizaran los resultados y minimizaran el riesgo.

Si dos proyectos tienen las mismas utilidades aquel que tenga menor riesgo es el más deseable. En caso que dos proyectos tengan la

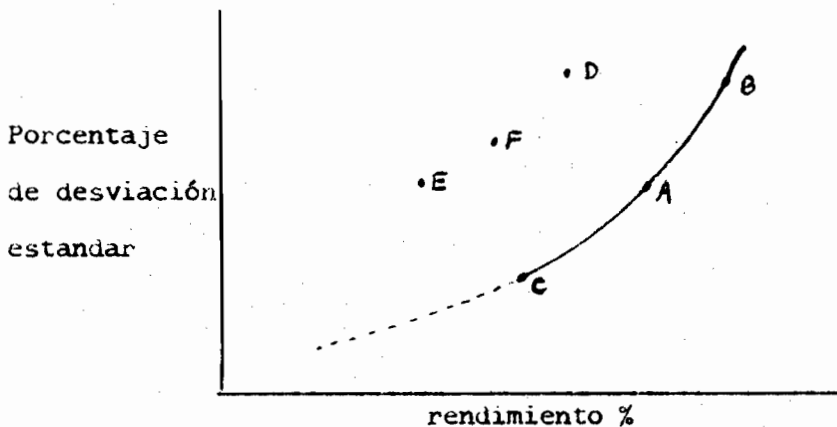
misma variabilidad (riesgo) aquel que produzca el retorno esperado más alto será el elegido. Tal es la política de eficiencia y la mejor manera de medir la variabilidad es en términos de la distribución de probabilidades de los valores, entre los que es probable se ubiquen los resultados.

La variabilidad de un perfil de riesgo es medida por la desviación estandar, que representa la extensión a ambos lados del valor esperado de los dos tercios de todos los ingresos reales.

El valor esperado y la desviación estandar pueden ser representados en un gráfico para mostrar la eficiencia de cada política, y se puede trazar una línea entre los puntos que para una misma desviación estandar, tienen el ingreso mayor.

La línea se denomina la frontera de eficiencia por representar el mejor ingreso obtenible con esa desviación estandar dada.

Si tenemos las siguientes combinaciones.



Los puntos A, B y C caen en la frontera de eficiencia por que producen el máximo ingreso para cierto grado de riesgo, lo que no ocurre en D, E y F.

Hertz detalla un programa de simulación efectuado por J.M. Busn para simular el efecto de diversas políticas operando a través de un período de 15 años, en una compañía hipotética que selecciona los

proyectos de inversión anualmente, con criterios conocidos. Se utilizaron tres juegos de 37 inversiones hipotéticas, caracterizadas por los perfiles de incertidumbre de tres variables para cada año de la inversión particular; ventas, costos y monto de inversión. (73)

La simulación en el computador comprendía siete etapas:

1- Elegir una política de inversión estableciendo:

a) Criterio financiero de selección y b) reglas de decisión, que especificaban un valor esperado mínimo en los puntos de probabilidad de 10% y 90% en los perfiles de riesgo.

2- De los perfiles de riesgo de las variables fundamentales de cada inversión, se obtienen los perfiles de riesgo de cada inversión.

3- Comparar las inversiones con la política fijada y aceptar únicamente aquellas que cumplen los requisitos, sujeto a las restricciones de monto y tamaño de inversiones a realizarse cada año.

4- Simular el comportamiento financiero de las inversiones elegidas en un período de 15 años, seleccionando al azar los datos anuales del perfil individual de riesgo del proyecto para obtener los resultados de cada inversión en cada año.

5- Combinar los resultados por año para obtener los resultados financieros del conjunto de inversiones.

6- Repetir el proceso entero hasta producir una distribución estable de los resultados financieros de la política elegida. Determinar el valor esperado y la desviación estandar del conjunto de inversiones.

7- Repetir el proceso para las otras políticas y conjuntos de inversiones alternativas.

Para cada uno de los tres conjuntos de inversiones, fueron probadas políticas de inversión, con criterio conservador, de mediano riesgo y de alto riesgo.

La política de inversión conservadora trata de evitar riesgos, por lo que exige alta probabilidad de no llegar a tener pérdidas, lo que va acompañado por rendimientos moderados; por el contrario, la política opuesta de alto riesgo, exige altas utilidades sin considerar los riesgos que las acompañan.

La simulación se repitió 500 veces para cada política y cada conjunto de inversiones.

Veamos en un ejemplo la naturaleza de ambas políticas y cada conjunto de inversiones.

CRITERIO UTILIZADO	Política conservadora		Política de alto riesgo		
	90%probabili dad de supe- rar	Valor Espe- rado	90%prob de supe rar	Valor Espe- rado	10%prob de supe rar
1. Período de recupero (años)	7	5	10	4	2
2. Promedio anual de saldos (%)	15	20	-5	15	45
3. Tasa interna de retorno (%)	10	15	-10	10	35
4. Valor actual neto (coeficiente de ren- dimiento)					
Tasa (10%	1.0	--	--	--	--
Utilizada 0 15%	--	1.0	--	1.0	--
(45%	--	--	--	--	1.0

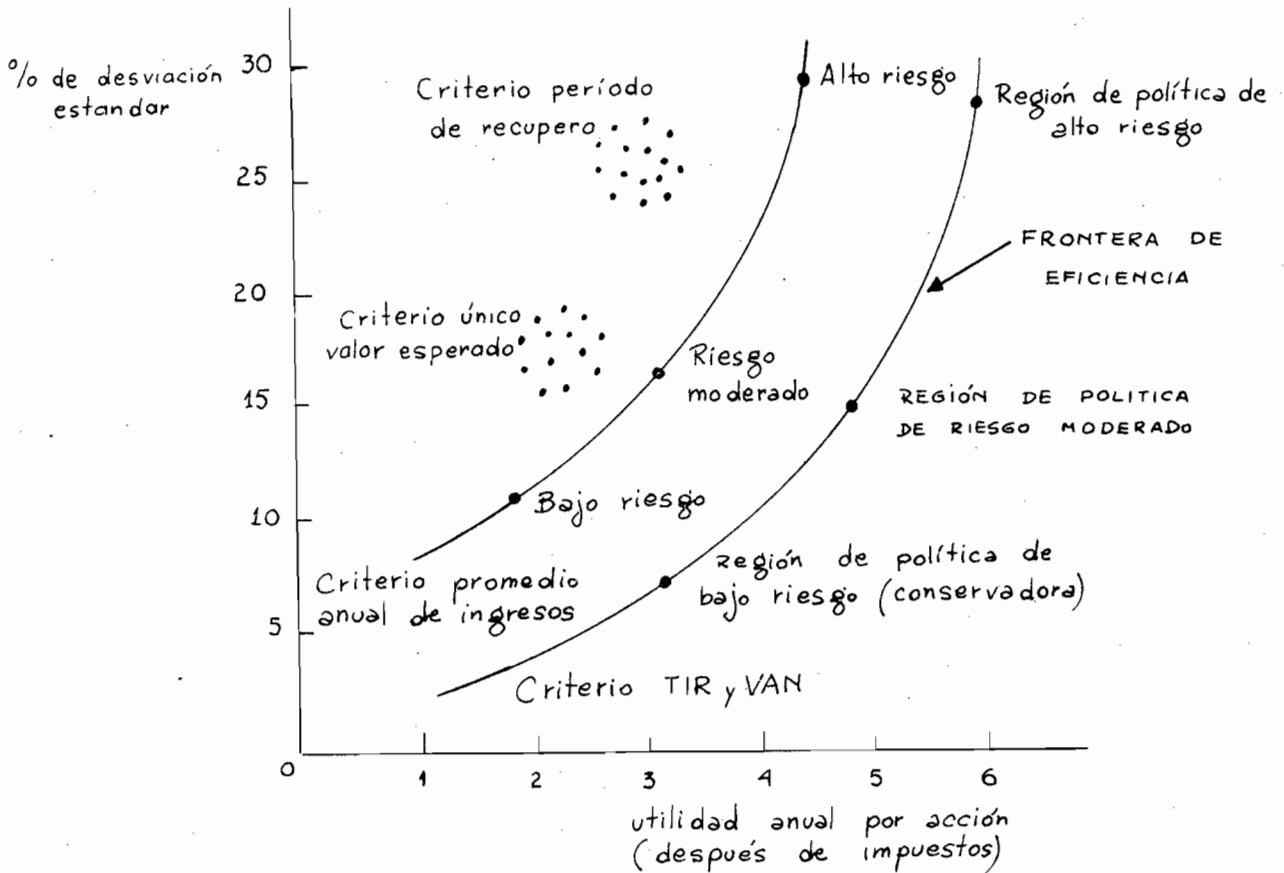
Los valores indican la relación entre el Valor Actual Neto del flujo de fondos dividido por el valor actual de la inversión.

Estos resultados nos permiten extraer como conclusiones:

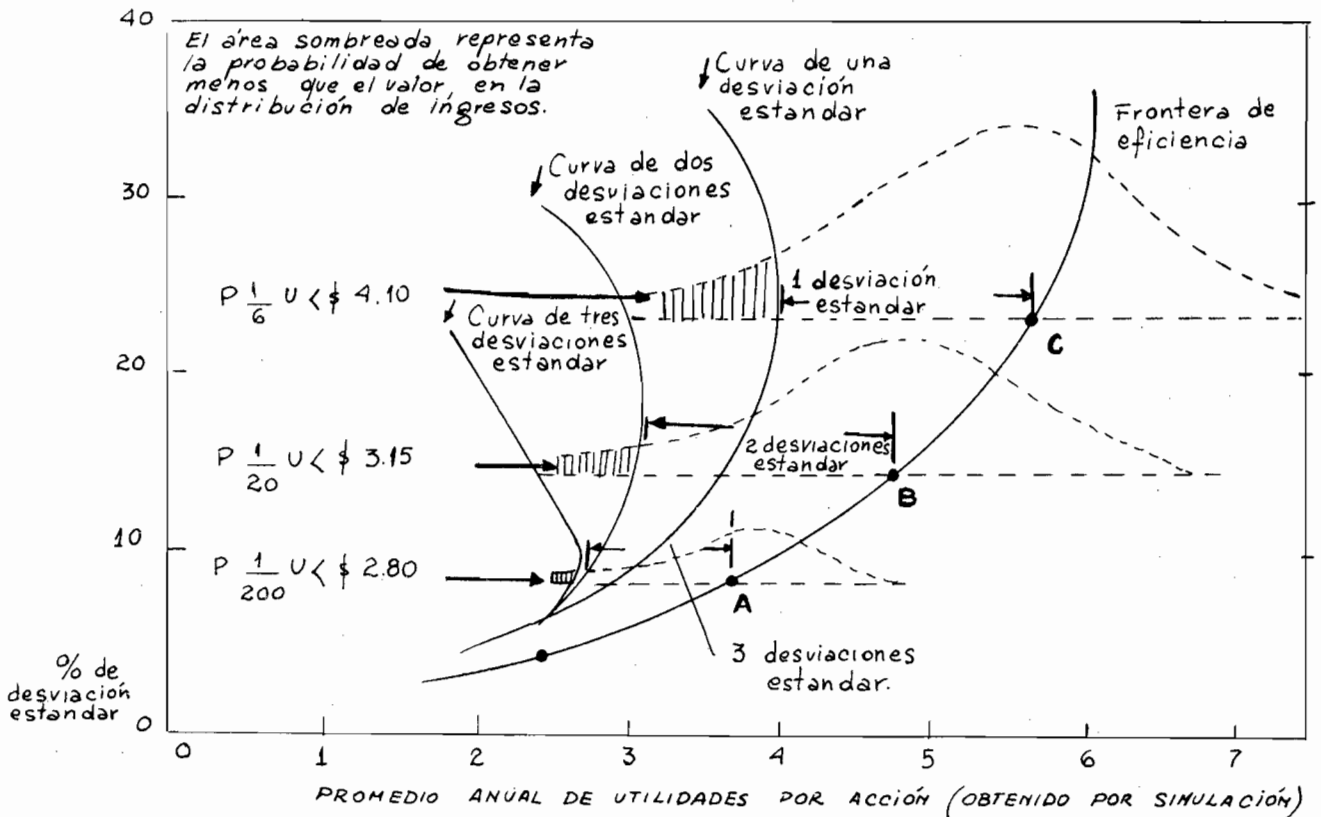
- a) Hay una amplia diferencia en el rendimiento entre diferentes criterios de selección de inversiones.
- b) Las políticas basadas en análisis del riesgo dan mejores resultados que aquellas que usan como regla de decisión considerar un único valor estimado.
- c) En el largo plazo los resultados son fundamentalmente dependientes del grado de riesgo aceptado.
- d) Ciertos criterios de inversión son empíricamente mejores que otros. En todos aquellos casos en que el objetivo es el crecimiento, o sea, que los resultados son medidos sobre la base de los resultados por acción, tanto el criterio de la Tasa Interna de Retorno como el del Valor Actual Neto son superiores al criterio de retorno promedio anual (que no considera el valor tiempo del dinero).

Aún cuando el período de recupero es un criterio muy definido, es inconsistente y es también una medida ineficiente. Todas las inversiones elegidas con el criterio de período de repago mostraron mayores variaciones, junto con menores utilidades, que las otras.

Los resultados expresados en términos de desviación estandar como porcentaje de las utilidades anuales, o sea los límites de variación que pueden esperarse en las dos terceras partes de las veces. Gráficamente tenemos:



DETERMINACIÓN DE LIMITES DE RIESGO EN LA FRONTERA DE EFICIENCIA



En el cuadro que sigue vemos lo que sucede si se desea asegurar que los resultados superarán un determinado límite, $5/6$ de las veces. Para ello sustraemos una desviación estandar a la frontera de eficiencia, creando una nueva curva a la izquierda (dentro) de la frontera de eficiencia. Si con una actitud más conservadora se quiere tener $19/20$ de probabilidad de que los resultados superen un límite deben sustraerse dos desviaciones estandar, que nos da una nueva curva a lo largo de la cual se ubican los retornos resultantes de cada política específica. Si todavía se exige una mayor seguridad y no se acepta más de $1/200$ de probabilidad que los resultados son menores que el límite dado deben sustraerse tres desviaciones estandar.

Es de destacar que conforme se tienen diferentes criterios de aversión al riesgo, se producen elección de políticas de inversión diferentes.

La política C provee un retorno esperado de \$5,50 con una desviación estandar de $\pm 25\%$; el valor de una desviación estandar hacia la izquierda es \$4,12 y de dos desviaciones \$2.75, (o sea $1/20$ de probabilidad de no bajar esa suma). En este último caso la política B ofrece un valor mayor \$3,15. Para el caso de empresarios muy conservadores que exijan $199/200$ de probabilidad de superar el límite, la política A es la más indicada por cuanto la utilidad es de \$2,80.

Vemos pues, que depende de la actitud frente al riesgo del empresario qué límite se seleccione. Cuanto menor es la proporción de desviación estandar que debe sustraerse para definir una frontera en la cual una política dada es la mejor, mayor es el deseo del empresario de aceptar riesgos.

La simulación ofrece una herramienta eficaz para examinar las consecuencias riesgosas de diversas políticas de inversión.

Para ello debemos: a) determinar los perfiles de riesgo de todas las propuestas, b) usar un sistema de descuento para igualar en el tiempo los ingresos en el tiempo, c) establecer reglas alternativas para su evaluación y d) determinar límites de riesgo para las políticas alternativas.

Sin embargo, la misma política no mostrará necesariamente los mismos límites de riesgos si se usa para diferentes clases de inversiones.

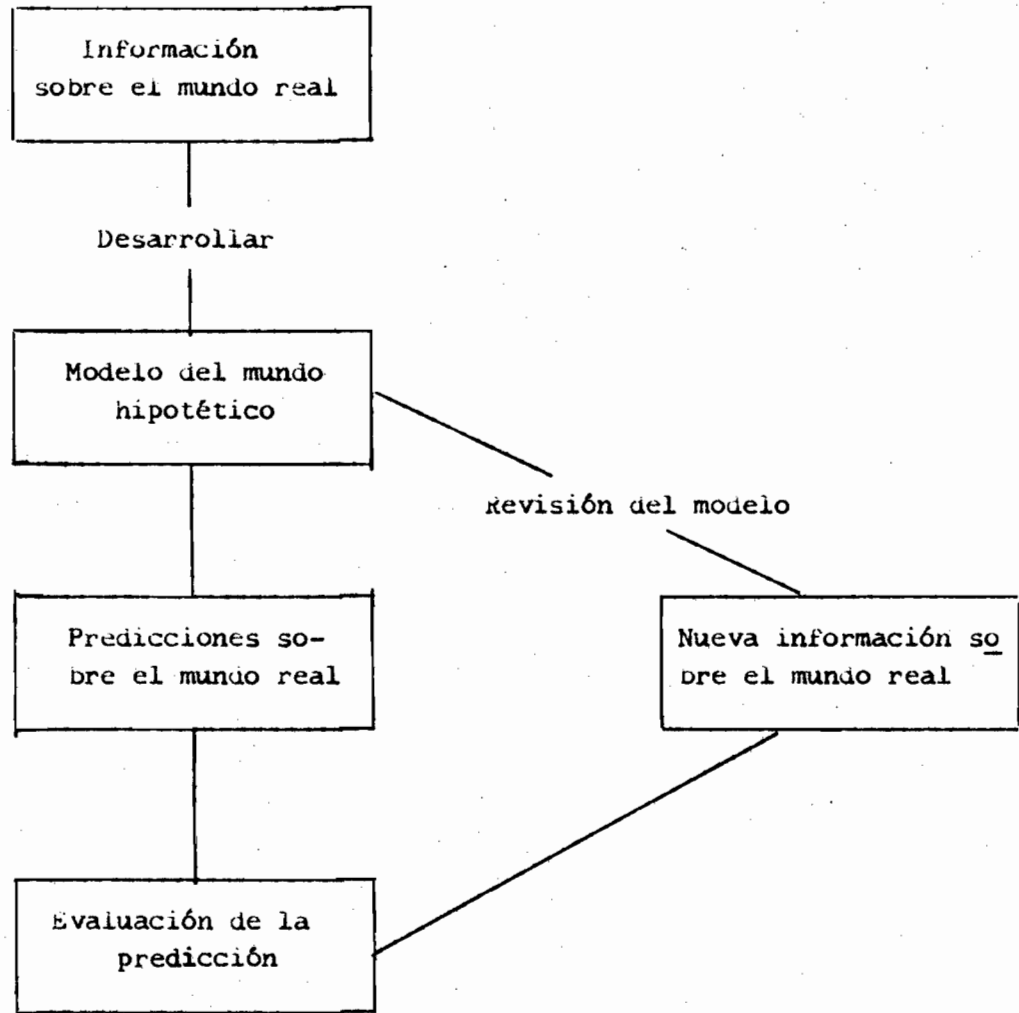
La empresa estará en condiciones de determinar el nivel de inversiones para cada clase de proyectos que combinarían con niveles de inversión y de riesgos en otras clases para maximizar las probabilidades de alcanzar los objetivos a largo plazo establecidos.

Con la ayuda de la simulación se puede establecer límites y topes en las diversas clases de inversiones.

Se pueden examinar en detalle las clases de oportunidades de inversión generadas por los diversos segmentos de las diferentes actividades de una empresa y elegir políticas de inversión que provean control seguro sobre su crecimiento a largo plazo (73).

7.2 Construcción del modelo

El modelo es la abstracción de lo que es probable que ocurra en la realidad durante el curso de un proyecto y a menudo puede resultar poco claro o parcial. El modelo matemático es una presentación precisa de las premisas y supuestos básicos y lógicos empleados en la valoración de un proyecto.



Características de un modelo de simulación.

Tal como se ve en el diagrama el primer paso es el de recopilación de toda la información sobre el mundo real, que nos permite desarrollar un modelo del mundo hipotético. En este modelo están representadas y traducidas a lenguaje matemático las relaciones más importantes del mundo real que nos interesa estudiar. Mediante la manipulación del modelo surgen las predicciones sobre el mundo real resultantes de los cursos de acción alternos.

Seguidamente se procede a la evaluación de las predicciones por parte de los tomadores de decisiones. Luego de la evaluación y ante posibles nuevos datos del mundo real se procede a revisar el modelo.

Vemos así que el modelo requiere para su elaboración, tres fases: 1) planeación, 2) evaluación y 3) diseño.

Una vez compatibilizados los objetivos a largo plazo de la dirección con el modelo y definido su alcance, se debe decidir las variables que se considerarán en la simulación (40).

Tomemos un ejemplo sencillo con las siguientes ecuaciones.

Determinar r tal que:

$$\sum (1 + r)^{-t} \times \text{Beneficio neto} = 0 \quad (1)$$

$$t = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{Beneficio neto}_t = \text{Ingreso}_t - \text{Costo}_t \quad (2)$$

$$\text{Costo}_t = k_t \times \text{costo del proyecto para } t \leq c \quad (3)$$

$$= \text{costo mantenimiento para } t > c \quad (3)$$

c = período de construcción

$$\text{Costo del proyecto} = \text{estructura} + \text{honorarios de consultores} + \text{costos de administración} \quad (4)$$

$$\text{estructura} = \text{cantidad} \times \text{precio}_p \quad (5)$$

$$\text{INGRESO} \begin{cases} = 0 & \text{para } t \leq c & (6) \\ = ((t-c)/f) \times \text{ingreso luego de alcanzado el} \\ & \text{desarrollo completo para } c < t < (c+f) \\ = \text{ingreso luego de alcanzado el desarrollo} \\ & \text{completo para } t \geq (c+f) \end{cases}$$

En la ecuación (3) se establece que durante el período de construcción el costo c es cierta proporción k_t del costo total del proyecto y que luego el costo es un costo constante de mantenimiento. En (5) se establece el número de estructuras necesarias y su costo unitario. En (6) se determina que el ingreso anual es cero durante el período de construcción c , aumenta a una tasa constante f durante el período de desarrollo y permanece luego constante.

En este proyecto tenemos un detalle explícito de los beneficios o pérdidas anuales netas.

Para su concreción se debe suministrar los datos de:

n vida del proyecto
 kt proporción del costo del proyecto desembolsada en cada año del período de construcción.
 c período de construcción
 honorarios de consultores
 costos de administración
 cantidad de estructuras y su precio
 r período de desarrollo (desde finalización del proyecto hasta lograr el nivel de ingreso una vez alcanzado el desarrollo completo).

El computador recibe instrucciones para seleccionar al azar un valor para cada una de las variables, dentro de las instrucciones reales y las interdependencias en las variables. Con estos valores se calcula el retorno a valor actual. Este proceso es repetido el número de veces suficiente para obtener una estrecha aproximación a la distribución real de probabilidades de los retornos.

Existen programas de computadoras para seleccionar al azar entre las distribuciones de probabilidades, para calcular el Valor Actual Neto o la Tasa Interna de Retorno, luego de repetir reiteradamente el mismo proceso, se suministra una distribución de frecuencias.

El tamaño de la prueba se determina por prueba y error, o sea cuando se llega al punto que la distribución de frecuencias no cambia ante aumentos mayores en su tamaño.

Consideremos una distribución independiente de ingresos y costo de inversión.

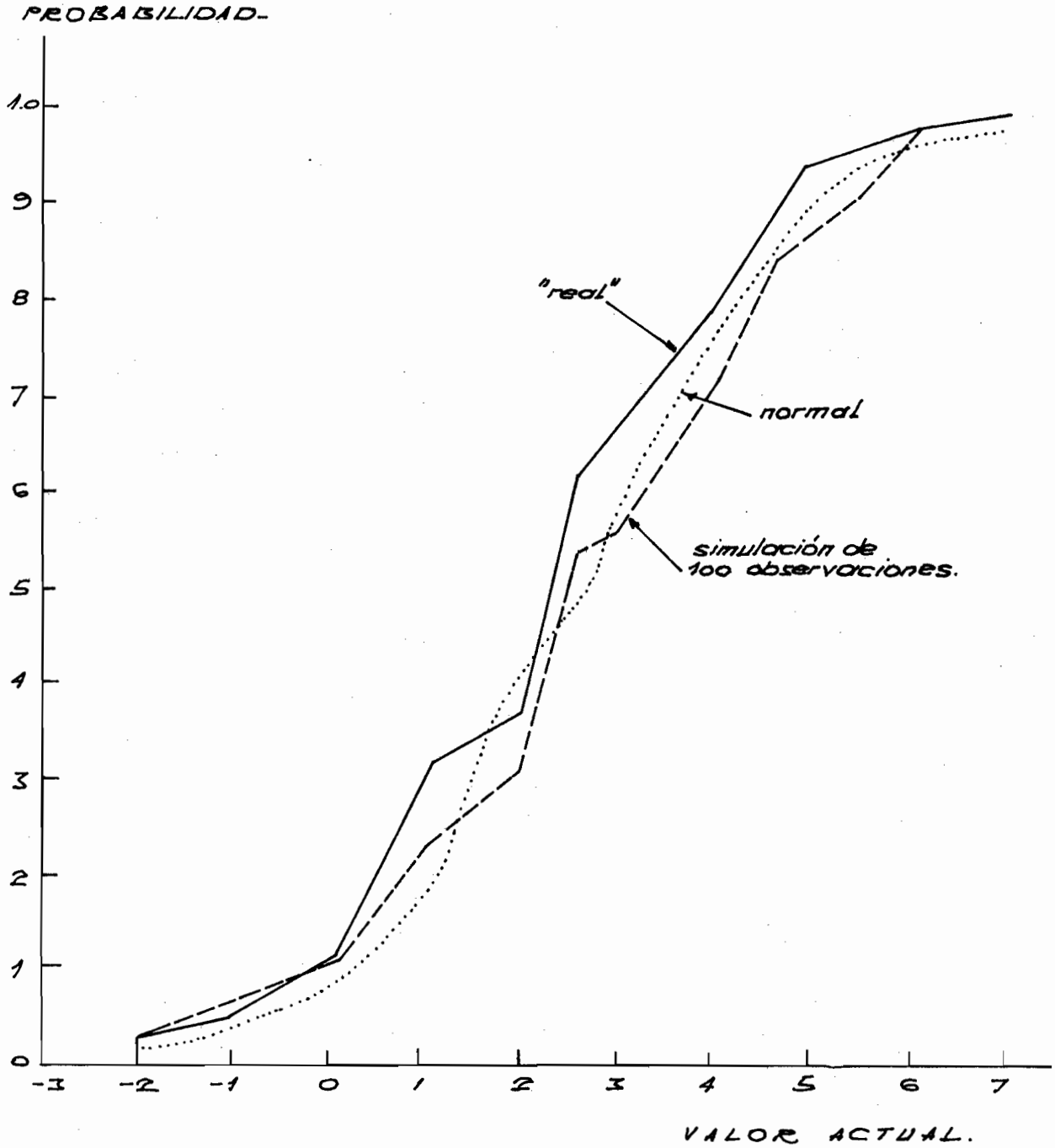
INGRESOS - X		COSTO INVERSION - Y	
Valor	Probabilidad	Valor	Probabilidad
20	.10	8	.20
22	.20	10	.60
25	.40	12	.20
28	.20		
30	.10		

Al ser independientes ambas variables hay 15 combinaciones posibles con los siguientes resultados:

VALOR ACTUAL (R)	PROBABILIDADES		
	Distribución Real	Muestra simulada (50 observaciones)	Muestra simulada (100 observaciones)
-2	.02	.06	.03
-1	.04	0	.03
0	.06	.04	.05
0.5	.08	.06	.07
1	.12	.08	.06
2	.06	.06	.08
2.5	.24	.30	.21
3	.06	.02	.03
4	.12	.14	.15
4.5	.08	.10	.13
5	.06	.04	.03
6	.04	.10	.10
7	.02	0	.03
Media:	2.50	2.77	2.94
Varianza:	3.75	3.82	4.24

Para estimar la distribución de probabilidades del ingreso neto por el método de simulación, debe extraerse al azar un gran número de los valores de x e y de sus respectivas distribuciones de probabilidades y computar un valor de R por cada conjunto de los valores de x e y extraídos.

DISTRIBUCION DE PROBABILIDADES ACUMULADO DEL VALOR ACTUAL.



A medida que aumenta el número de la muestra el resultado tiende a aproximarse a la distribución real de probabilidades.

El cálculo de la media y varianza resulta de

$$\bar{X} = \sum (P_i) \cdot (X_i) = (20)(.10) + (22)(.20) + (25)(.40) + (28)(.20) + (30)(.10) = 25$$

$$\bar{Y} = \sum (P_i) (Y_i) = (.8)(.20) + (10)(.60) + (12)(.20) = 10$$

$$V(X) = \sum (P_i)(X_i - \bar{X})^2 = 8,6 \text{ y}$$

$$V(Y) = \sum (P_i)(Y_i - \bar{y})^2 = 1,6$$

La media \bar{R} resulta de calcular el valor actual de \bar{X} (usamos el factor .5 para establecer el valor actual)

$$\begin{aligned} R &= (.5) (\bar{X}) - \bar{Y} = .5 (25) - 10 \\ &= 2,5 \end{aligned}$$

$$V(R) = .5^2 V(X) + V(Y) = (.25)(8,6) + (1,6) = 3,75$$

Para determinar la probabilidad que R es menor de cualquier valor R_i se computa el índice $\frac{(R_i - R)}{[V(R)]^{\frac{1}{2}}}$ y se busca la probabilidad en una tabla de distribución normal.

Las probabilidades acumulativas de R , Prob. ($R < R_i$)

Valor Actual R_i	Distribución Real	Muestra de 50 observaciones	Muestra de 100 observaciones	Aproximación por distribución normal.
-2.0	0.02	0.06	0.03	0.01
-1.0	0.06	0.06	0.06	0.04
0	0.12	0.10	0.11	0.10
0.5	0.20	0.16	0.18	0.15
1.0	0.32	0.24	0.24	0.22
2.0	0.38	0.30	0.32	0.40

Cont'

Valor Actual R _i	Distribución Real	Muestra de 50 observaciones	Muestra de 100 observaciones	Aproximación por distribución normal
Cont'				
2.5	0.62	0.60	0.53	0.50
3.0	0.68	0.62	0.56	0.60
4.0	0.80	0.76	0.71	0.78
4.5	0.88	0.80	0.84	0.85
5.0	0.94	0.90	0.87	0.90
6.0	0.98	1.00	0.97	0.96
7.0	1.00	1.00	1.00	0.99

El método matemático del Valor Esperado es útil solamente si se considera un modelo simple compuesto por unas pocas variables, lo que lo hace sencillo y económico. El problema real es la utilidad que puede tener conocer la media y la varianza si no se conoce la curva de la distribución acumulada de probabilidades.

Es una cuestión empírica conocer la desviación sobre la real distribución y la curva normal. Vemos en el ejemplo que la distribución R no es normal, aunque sus resultados no difieren mucho de la curva normal, resultante de su media y varianza.

7.3. Desarrollo de casos prácticos de evaluación de proyectos

El modelo de una autopista de 64 millas desarrollado por - Reutlinger (39) es un ejemplo ilustrativo. El proyecto tiene un período de construcción de dos años y sus mayores beneficios derivan de los ahorros en los costos de mantenimiento del camino y en los costos de los usuarios.

En la tabla siguiente se muestran costos y beneficios basados en las mejores estimaciones de las distintas variables. No se han considerado los beneficios del tráfico inducido.

MODELO DE EVALUACION DEL PROYECTO DE CONSTRUCCION DE UN CAMINO

1. (Costo del proyecto)	= (Base de pavimento)+(Sub-base/soportes)+(Movimiento de tierras)+ (Provisión materiales de nivelación)
2. (Costo) ^t	= $\frac{\text{Costo del Proyecto}}{(\text{Tiempo de construcción})(n)}$ si t ≤ (tiempo de construcción) C si t > (tiempo de construcción)
3. (Tráfico de Autos) ^t	= (1 + Crecimiento tráfico autos) ^t x (Tráfico autos inicial)
4. (Tráfico de Camiones) ^t	= (1 + Crecimiento tráfico camiones) ^t x (Tráfico camiones inicial)
5. (Tráfico de Omnibus) ^t	= (1 + Crecimiento tráfico ómnibus) ^t x (Tráfico ómnibus inicial)
6. (Tráfico de Remolques) ^t	= (1 + Crecimiento tráfico remolques) ^t x (Tráfico remolques inicial)
7. (Tráfico Especial) ^t	= (1 + Crecimiento tráfico especial) ^t x (Tráfico especial inicial)
8. (Ahorro costo autos m.p.v.)	= (Costo autos m.p.v. camino anterior)-(Costo autos m.p.v. camino nuevo)
9. (Ahorro costo camiones m.p.v.)	= (Costo camiones m.p.v. camino anterior)-(Costo camiones m.p.v. camino nuevo)
10. (Ahorro costo ómnibus m.p.v.)	= (Costo ómnibus m.p.v. camino anterior)-(Costo ómnibus m.p.v. camino nuevo)
11. (Ahorro costo remolques m.p.v.)	= (Costo remolques m.p.v. camino anterior)-(Costo remolques m.p.v. camino nuevo)
12. (Ahorro costo especial m.p.v.)	= (Costo especial m.p.v. camino anterior)-(Costo especial m.p.v. camino nuevo)
13. (Ahorro costo operativo autos) ^t	= (Ahorro costo autos) x (Tráfico autos) ^t x (Millas) x (365)
14. (Ahorro costo operativo camiones) ^t	= (Ahorro costo camiones) x (Tráfico camiones) ^t x (Millas) x (365)
15. (Ahorro costo operativo ómnibus) ^t	= (Ahorro costo ómnibus) x (Tráfico ómnibus) ^t x (Millas) x (365)
16. (Ahorro costo operativo remolques) ^t	= (Ahorro costo remolques) x (Tráfico remolques) ^t x (Millas) x (365)
17. (Ahorro costo operativo especial) ^t	= (Ahorro costo especial) x (Tráfico especial) ^t x (Millas) x (365)
18. (Ahorro costo por menor extensión autos) ^t	= (Tráfico autos) ^t x (Costo rodar autos camino anterior) x (Reduc. millas) x 365
19. (Ahorro costo por menor " camiones) ^t	= (Tráfico camiones) ^t x (Costo rodar camiones camino anterior) x (Reduc. millas) x 365
20. (Ahorro costo por menor " ómnibus) ^t	= (Tráfico ómnibus) ^t x (Costo rodar ómnibus camino anterior) x (Reduc. millas) x 365
21. (Ahorro costo por menor " remolq.) ^t	= (Tráfico remolq.) ^t x (Costo rodar remolq. camino anterior) x (Reduc. millas) x 365
22. (Ahorro costo por menor " especial) ^t	= (Tráfico especial) ^t x (Costo rodar especial camino anterior) x (Reduc. millas) x 365

Cont'

Cont'

-
23. (Unidades de Tráfico)^t = (Tráfico autos)^t + 2(Tráfico camiones)^t + 2(Tráfico omnibus)^t + 3(Tráfico remolques)^t + 3(Tráfico especial)^t
24. (Costo mantenimiento camino anterior)^t = a + b x (Unidades Tráfico)^t, donde a y b son constantes.
25. (Costo mantenimiento camino nuevo)^t = c + d x (Unidades Tráfico)^t, donde c y d son constantes.
26. (Ahorro costo mantenimiento)^t = (Costo mantenimiento camino anterior) - (Costo mantenimiento camino nuevo) x Millas
27. (Total ahorro costo operativo)^t = (Ahorro costo operativo autos)^t + (Ahorro costo operativo camiones)^t + (Ahorro costo operativo ómnibus)^t + (Ahorro costo operativo remolques)^t + (Ahorro costo operativo especial)^t
28. (Total ahorro costo por menor kilometraje)^t = 18 + 19 + 20 + 21 + 22
29. (Beneficios)^t = (Total ahorro costo operativo)^t = (Total ahorro costo por menor extensión)^t + (Ahorro costo mantenimiento cuando t > (Tiempo construcción)
cuando t < (Tiempo construcción)
30. Calcular r tal que $\sum_{t=1}^n (1+r)^{-t} (\text{Costo})_t = \sum_{t=1}^n (1+r)^{-t} (\text{Beneficios})_t$
-

Observaciones:

Tráfico se considera al Promedio Diario de Tráfico;
Costo m.p.v. es costo milla por vehículo;
Cualquier variable seguida por t está indicando que su monto es anual.

DATOS

Ecuación N°	Descripción de la variable	Mejor Estimación De su valor	Distribución de Probabilidades	
1	Base de pavimento	466,000	Discreta:	
			<u>Probabilidad</u>	<u>Costo</u>
			40%	579,000(Base 6")
			60%	466,000(Base 5")
1	Sub-base/soportes	311,150	Escalones Rectangulares:	
			i) Si el costo de base es 579,000 luego:	
			<u>Probabilidad es</u>	<u>Costo sub-base y soportes es</u>
			30%	150,000-240,000
			50%	240,000-300,000
			20%	300,000-400,000
			ii) Si el costo de base es 466,000 luego:	
			<u>Probabilidad es</u>	<u>Costo sub-base y soportes es</u>
			30%	200,000-300,000
			50%	300,000-340,000
			20%	340,000-440,000
1	Movimiento de tierras	92,400	Uniforme con límites	46,200 y 92,400
1	Provisión materiales nivelación	15,000	Triangul.con límites	10,000 a 30,000
1	Otros	1,023,000	Triangul.con límites	981,850 a 1,163,500
2	Tiempo de construcción	2		
3	Tráfico inicial de autos	41	Normal: Media 41, Desviación Estandar 3,35	
4	Tráfico inicial de camiones	23	Triangul.con límites	15 a 35

Cont'

Cont'

Ecuación Nº	Descripción de la variable	Mejor Estimación De su valor	Distribución de Probabilidades	
5	Tráfico inicial de ómnibus	6	Normal: Media 6, Desviación Estandar 1	
6	Tráfico inicial de remolques	15	Normal: Media 15, Desviación Estandar 3.3	
7	Tráfico inicial especial	0	<u>Probabilidad</u>	<u>Nivel de tráfico</u>
			25%	35
			75%	ninguno
3	Crecimiento tráfico de autos	6%	Uniforme con límites 4% a 8%	
4	Crecimiento tráfico de camiones	8%	Uniforme con límites 6% a 10%	
5	Crecimiento tráfico de ómnibus	6%	Uniforme con límites 4% a 8%	
6	Crecimiento tráfico de remolques 8%	8%	Uniforme con límites 6% a 10%. Crecimiento de camiones y remolques están completamente correlacionados.	
7	Crecimiento tráfico especial			
	Período 1968-1972	0		
	Período 1972 en adelante	-20%		
8	Costo rodar autos en camino anterior	0,0613		
9	Costo rodar camiones en camino anterior	0,1076		
10	Costo rodar ómnibus en camino anterior	0,1516	Uniforme con límites -12% a +15%; todos completamente correlacionados*. Además el costo operativo de los camiones es variado uniformemente entre -5% a +10% para considerar la incertidumbre sobre el tamaño de los camiones.-	
11	Costo rodar remolques en camino anterior	0,215		
12	Costo rodar especiales en camino anterior	0,215		
8	Costo rodar autos camino nuevo	0,0479		
9	Costo rodar camiones camino nuevo	0,0670		
10	Costo rodar ómnibus camino nuevo	0,1034		
11	Costo rodar remolques camino nuevo	0,141		

Cont'

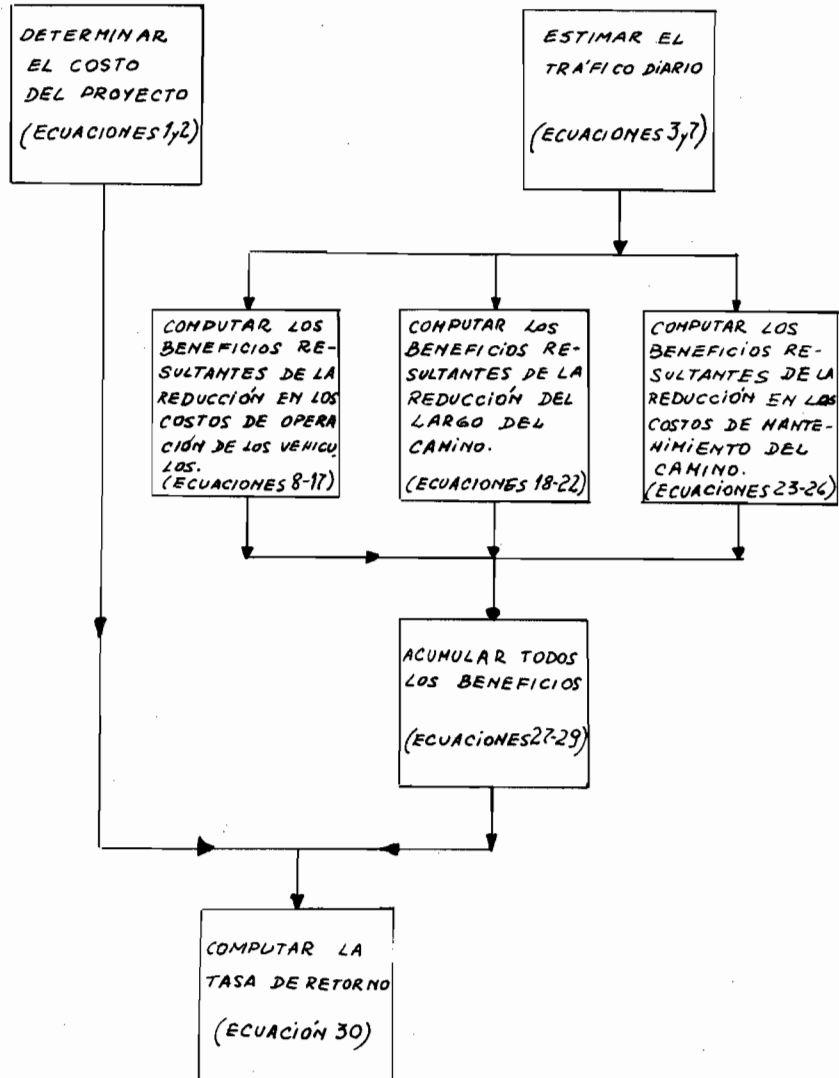
Cont'

Ecuación N°	Descripción de la variable	Mejor Estimación De su valor	Distribución de Probabilidades
12	Costo rodar especiales camino nuevo	0,140	
13-17	Millas	64	
18-22	Reducción en millas		
24	a	417,0	
24	b	3,6	Uniforme con límites 3 y 5
25	c	600,0	
25	d	2,25	Uniforme con límites 1 y 2,5
30	m (Vida del proyecto)	20	Triangular con límites 12 a 25 años

* Esta distribución es artificial y solamente es referida para obtener una correcta distribución de los ahorros dado el mejoramiento del camino.

⊛ Ignorada debido a la variación de los ahorros que es totalmente considerada por la variación de los costos operativos del camino anterior.

Evaluación del proyecto de construcción de un camino.



COSTOS Y BENEFICIOS UTILIZANDO LA MEJOR ESTIMACION DE CADA VARIABLE

año	BENEFICIOS		Beneficio Neto
	Ahorro de costos de operación vehículos	Ahorro de costos de mantenimiento del camino	
1	Costo del proyecto		(-560)
2	Costo del proyecto		(-560)
3	84	4	88
4	90	5	95
5	97	6	103
6	104	7	111
7	112	8	120
8	120	10	130
9	129	12	141
10	139	13	152
11	149	16	165
12	161	17	178
13	173	19	192
14	186	21	207
15	200	24	224
16	215	26	241
17	231	29	260
18	248	33	281
19	267	36	303
20	287	40	327
21	309	43	352
22	333	47	380

-La tasa interna de retorno es aproximadamente 11.6 %.

Para construir un modelo de evaluación se debe identificar el objetivo final, luego trabajar hacia el comienzo (para el logro de los datos requeridos), pasando por los objetivos intermedios. Por el contrario cuando se dan las instrucciones y datos al computador se comienza con los datos básicos, calculando nuevos datos con las ecuaciones previstas, los que constituyen datos para los pasos siguientes.

Veamos el diagrama de secuencia de operaciones del modelo en el cual cada cuadrado represente un sub-modelo que puede ser modificado o suprimido conforme las circunstancias particulares. También si es necesario otros sub-modelos serán agregados.

Puede notarse que el modelo es más general que el necesario para este proyecto, por cuanto en este caso no hay reducción en la longitud del camino y no se incluye en el modelo los beneficios derivados de nuevo tráfico.

Si consideramos una postergación de tres años para iniciar el proyecto; suponiendo que no existan cambios en los costos, como hemos pronosticado un aumento en el tráfico, la inversión tendría un mayor retorno, que, determinado con la ayuda del modelo, se calcula pasará del 11.6% al 14.3%. Este es una aplicación de como un cambio en el proyecto afecta a la tasa de retorno.

El valor de mayor información puede ser valorado con un ejemplo.

Para determinar las estimaciones únicas del cuadro hemos tenido que hacer una estimación rápida del tráfico inicial. Supongamos que a cierto costo puede obtenerse información del nivel exacto del tráfico inicial. Para decidir si resulta conveniente pagar por ese dato más preciso, procederemos a:

- 1) Evaluar las posibilidades de encontrar diversos niveles de tráfico inicial.

2) Calcular el valor actual de la tasa de inversión para diversos niveles de tráfico, considerando una tasa de descuento que refleje el costo de oportunidad del capital.

3) Determinar si no teniendo mayor información, la decisión será llevar adelante el proyecto o será desechado.

4) Calcular el valor esperado de la información adicional, como la suma de los valores actuales negativos que se determinen en 2) multiplicado por sus respectivas probabilidades de ocurrencia, en caso que la decisión hubiera sido seguir adelante con el proyecto sin obtener mayor información. En el caso que la decisión fuera no continuar con el proyecto debe sumarse los valores actuales positivos obtenidos en 2) por sus probabilidades. Supongamos que los niveles del tráfico inicial y su distribución de probabilidades sean las siguientes considerando que las cuatro series por tipo de tráfico están perfectamente correlacionadas.

En la última columna se ha calculado el valor actual de los beneficios del proyecto al 10% de descuento para diferentes niveles de tráfico inicial.

Probabilidades	Promedio inicial de tráfico diario				Valor actual en miles
	Autos	Camiones	Omnibus	Remolque	
.05	33	19	5	11	-106
.05	35	20	5	12	-46
.10	37	21	5	13	15
.20	39	22	6	14	92
.20	41	23	6	15	152
.20	43	24	6	16	212
.10	45	25	5	17	256
.05	47	26	5	18	314
.05	49	27	5	19	377

Consideremos los beneficios de contratar los servicios de consultores para determinar los niveles exactos del tráfico inicial.

Averiguamos que decisión se tomaría con la información disponible si ésta fuera la de realizar la obra; la información adicional sería útil únicamente en el caso que demostrara que el nivel del tráfico es tan bajo que provoca un valor actual negativo.

Vemos en la tabla que a los valores actuales negativos corresponde una probabilidad del 10% y el beneficio esperado de la información adicional es la suma de las pérdidas potenciales multiplicadas por sus probabilidades, o sea:

$$(-106 \times .05) + (-46 \times .05) = -5,3 + (-2,3) = -7,6 \text{ miles.}$$

En caso que la decisión fuera la de no realizar el proyecto por cuanto no se desea tomar ningún riesgo de tener pérdidas, el valor de la información adicional está dado por la suma de los valores actuales positivos por sus respectivas probabilidades:

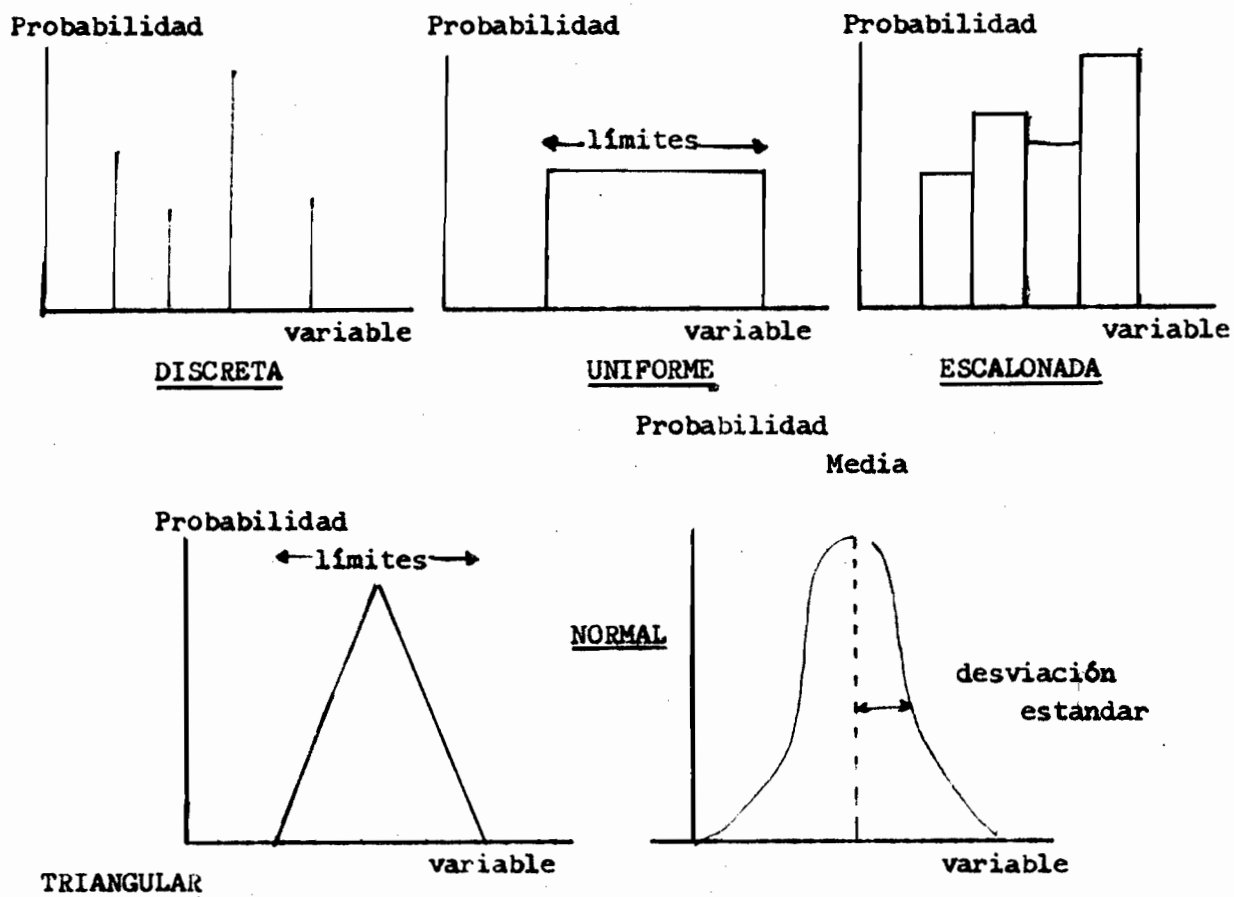
$$(15+256).10 + (92+152+212).20 + (314+377).05 = 27.1+91.2+34.5 = 152,8 \text{ miles}$$

Acerca del análisis de sensibilidad de variables fuera de nuestro control, podemos considerar la tasa de incremento de tráfico y determinar p.ej. que una reducción del 20% en las tasas de crecimiento reducen la tasa interna de retorno de 11.6% a 9.7% y que una reducción del 20% en el nivel inicial de tráfico considerado inicialmente reduciría la tasa interna del retorno al 8,8%.

Vemos a través de los análisis de sensibilidad que una mejor manera de enfocar la evaluación es considerar simultáneamente las incertidumbres derivadas de las variables fundamentales, reemplazando las mejores estimaciones por las distribuciones estimadas de probabilidades en los casos -la gran mayoría- que constituyen una determinación de la información disponible más cercana a la realidad de los hechos. Es este el fundamento del denominado análisis del riesgo (risk analysis).

Uno de los problemas más engorrosos en el análisis del riesgo es la elección de una distribución de probabilidades. En realidad la cuestión es encontrar una distribución que mejor exprese el criterio del evaluador y no encontrar la verdadera distribución de la variable.

Las formas de distribución de probabilidades generalmente más usadas son:



En la distribución por escalones la transición de probabilidades subjetivas a cuantitativas se basa en el ordenamiento preferencial, que puede ser realizado por el evaluador. A veces cuando se intenta pasar de una distribución escalonada a una continua resulta difícil encontrar una distribución que esté estrechamente vinculada a la escalonada; para ésta última es más fácil generar los números al azar.

En la distribución discreta las probabilidades en vez de asignarse a cada escalón se asignan a un solo valor. La distribución discreta se utiliza cuando las variables son discretas por naturaleza.

La distribución uniforme se utiliza cuando el juicio es muy vago y el evaluador no puede hacer diferencias entre dos valores dentro de los límites de la variable. Se puede utilizar en caso de variables de baja sensibilidad y en todos los casos que se desea sobreestimar la probabilidad de los extremos de las variables.

La distribución Beta usada en sistema PERT, es definida completamente si además de sus límites se fijan dos parámetros.

La literatura acerca del sistema PERT sugiere el uso de la moda y una desviación estandar igual a $1/6$ de su límite.

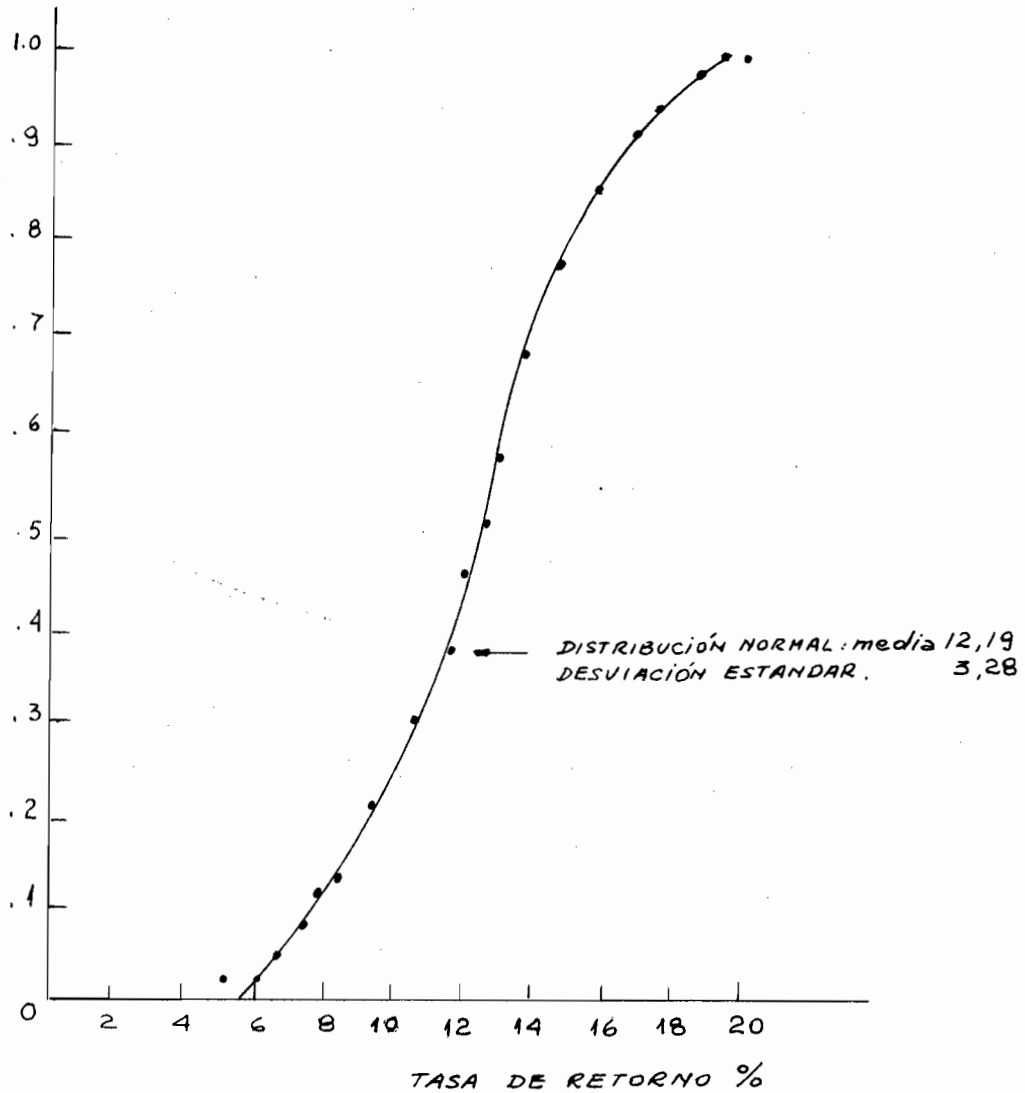
La distribución triangular refleja el hecho de asignar a un valor cercano al extremo de un límite, menor probabilidad que la de un valor cercano a la mejor estimación.

La distribución normal parece ser de no mucha utilidad en el análisis de riesgo de las variables, pero es un buen supuesto para la distribución final de la Tasa Interna de Retorno. Se afirma que el uso de la distribución normal no es apropiado cuando se hayan involucrados juicios subjetivos.

Se procede a repetidos cálculos de la tasa de retorno utilizando conjunto de valores para cada variable, extraídos al azar en función de sus respectivas probabilidades. Luego de 300 iteraciones resulta una distribución de probabilidades acumuladas tal como se muestra. La tasa de retorno esperada o media del proyecto es 12.2% y su desviación estandar 3.3%.

La distribución es muy similar a la distribución normal, por consiguiente las tablas de esa distribución pueden ser usadas para determinar que, la probabilidad de obtener una tasa de retorno menor del 10% es de 25% y que se reduce al 3% la probabilidad de rendimientos menores del 6%.

PROBABILIDAD
ACUMULADA



Resulta innegable que la consideración en un proyecto de cursos alternativos de acción es siempre muy útil. El valor de conocer la distribución estimada de probabilidades depende del grado de crédito que tengan las estimaciones hechas y del conocimiento de las distribuciones de probabilidades de proyectos alternativos.

No solamente se logra hacer que el estudio del proyecto pueda calcularse por medio de computadoras, sino que obliga a estudiar el proyecto y hacer una valoración mucho más adecuada de la que sería posible en otros enfoques.

Su preparación, obtención de los datos y el establecimiento de los empleos del modelo es materia reservada a los expertos en cada materia específica.

Una vez disponible el modelo formal y alimentado con los datos básicos es posible efectuar análisis de sensibilidad, o sea en que forma los cambios en parámetros tomados individualmente influyen en los beneficios derivados del proyecto. Su conocimiento permite tomar decisiones adecuadas, detectando variables que estando fuera del control del empresario, pueden influir preponderantemente en su éxito o fracaso e indican los riesgos que la tasa de retorno sea menor que la esperada. También permite determinar en que magnitud afecta la Tasa Interna de Retorno una demora en la construcción, lineamientos de dirección alternativos, un proyecto menor, etc.

La estimación del riesgo involucrado en el proyecto es uno de los usos más importantes del modelo de simulación. La valoración del riesgo por simulación puede utilizar la información con la probabilidad relativa de realización de diferentes valores para cada una de las variables fundamentales y convertirlas en una distribución de probabilidades de la Tasa Interna de Retorno. Repitiendo 200 ó 300 veces el proceso de escoger al azar los valores de cada variable, se obtiene una distribución consistente de probabilidades de la TIR.

Si bien algunas componentes del modelo no son utilizables en todos los proyectos ya sea por falta de relevancia o de los datos necesarios, es muy útil tener a mano un modelo general para la valoración de proyectos del mismo tipo.

Asimismo puede resultar que para ciertos proyectos se haga necesario extender el modelo y hacer mayores refinamientos.

Una presentación formal del modelo es sumamente útil para el seguimiento de la evaluación de proyectos. A medida que los resultados reales se vayan produciendo el modelo puede ser modificado para hacer rápidos recálculos de los beneficios reales y controlar los análisis previos de sensibilidad y de valuación de riesgos.

Resulta muy instructivo concentrar la atención en el seguimiento y actualización de las predicciones de factores específicos y como éstos afectan el resultado del proyecto que limitar nuestra atención al éxito o fracaso global del proyecto individual (39).

El primer análisis de riesgo efectuado por el Banco Internacional de Reconstrucción y Fomento, fue el del puerto de MOGADISCIO en Somalia.

Inicialmente se utilizó para evaluar el proyecto un análisis convencional de costo-beneficio. Ante las dificultades de determinar la justificación económica del proyecto usando las mejores estimaciones, se realizó un análisis de sensibilidad limitándose las fuentes de riesgo a siete variables. En base a estas variables se realizó el análisis de riesgo usando distribuciones de probabilidades para estas siete variables.

El análisis de sensibilidad se efectuó usando la estimación menos favorable para cada variable, lo que bajó la tasa de retorno de 12,2% al 2% que confirmaba las dudas acerca de su carácter riesgoso.

Examinando cada una de las 30 variables, se fueron variando una por vez manteniendo las restantes con su valor estimado, se tomaba el valor máximo, el mínimo y un valor 10% mayor que el mejor estimado. Las siete variables cruciales resultaron:

- 1- Costo de proyecto
- 2- Productividad de la mano de obra
- 3- Valor promedio de una tonelada de carga
- 4- Porcentaje de reducción de daños o pérdidas en la carga por mejor manipuleo
- 5- Tasa de crecimiento de las importaciones
- 6- Vida útil de las instalaciones
- 7- Valor de un día de estadía de barco

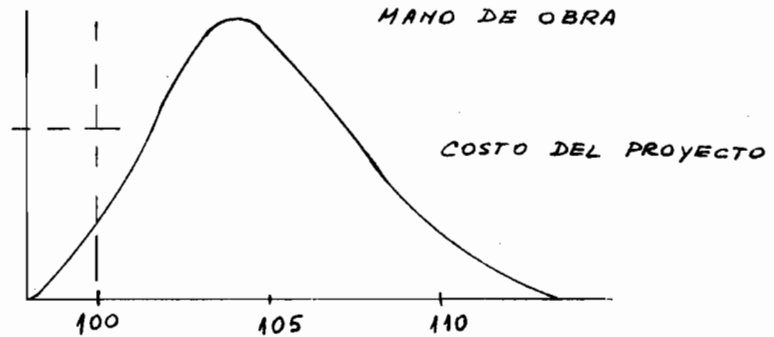
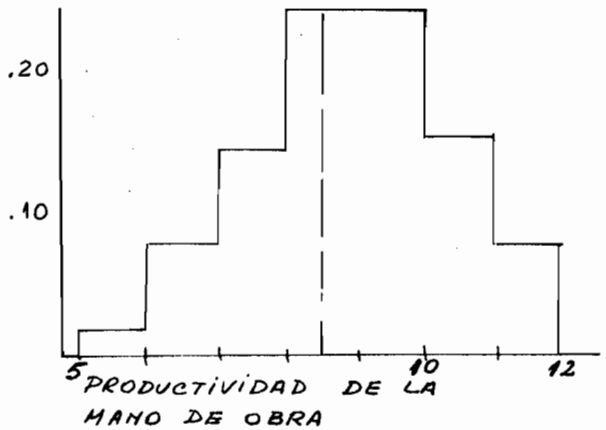
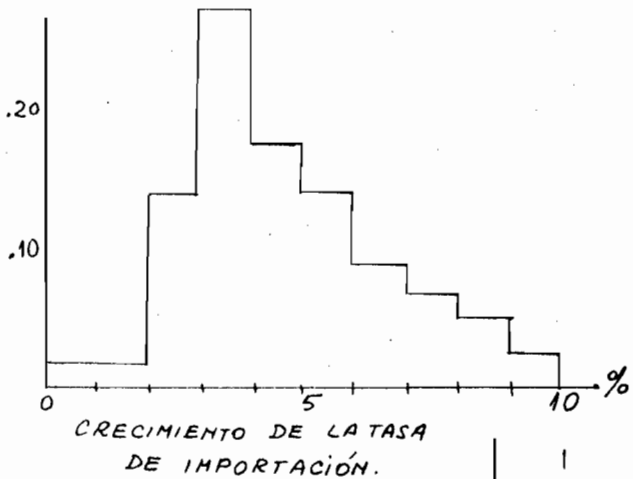
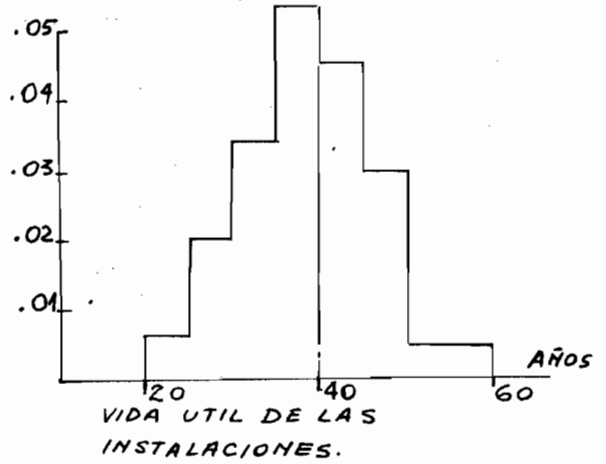
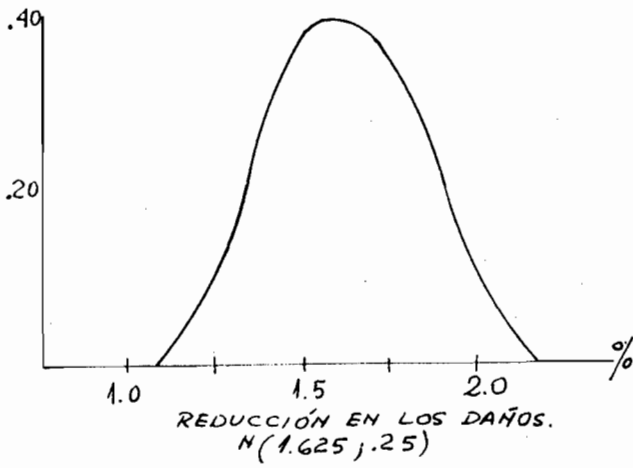
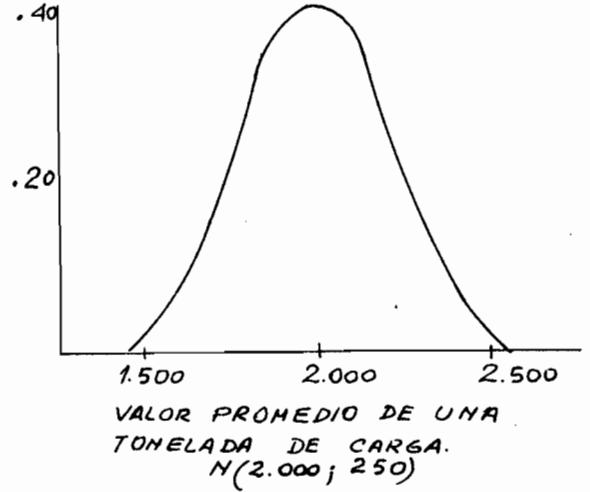
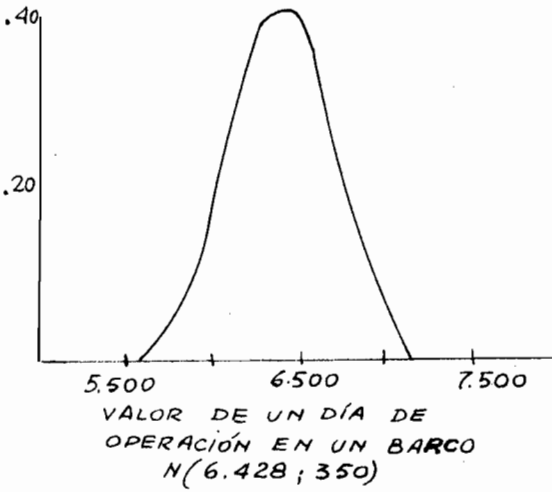
Con estas siete variables resultaba una tarea imposible, determinar la evaluación del proyecto por el infinito número de combinaciones posible. Cuanto más se incrementan las combinaciones de las variables menos clara resulta la descripción del proyecto. Por tanto el único camino posible de obtener una descripción sintética, es utilizando el criterio de análisis de riesgo.

La forma de determinar las distribuciones de probabilidades comprende una interacción iterativa entre los criterios cuantitativo y cualitativo.

Con la base de un criterio cualitativo se intenta producir cifras tentativas.

Estas cifras en su momento son traducidas en juicios cuantitativos que se comparan con el juicio cualitativo inicial. Las cifras se modifican a la luz de las discrepancias y se repite el procedimiento hasta lograr la armonía.

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDADES USADA EN LA SIMULACIÓN
DEL PROYECTO DEL PUERTO DE MOGADISCIO



La simulación es por mucho la operación más fácil y rápida del análisis del riesgo. Cuando se tiene la ayuda de un computador se programa generar valores al azar para cada uno de los parámetros y se computan las tasas de retorno, repitiendo el proceso hasta que se obtienen suficientes valores -en el ejemplo del puerto de Mogadiscio el proceso fue repetido 300 veces- y se obtiene la distribución de los resultados. En la representación gráfica se ha dibujado la curva de distribución acumulativa de probabilidades, con una media del 10,6% y una desviación estandar de 2,5%.

En la abcisa se extienden las tasas de retorno, mientras que en la ordenada se mide la probabilidad exceder esas tasas de retorno.

Vemos así que las probabilidades de exceder 15%, 7% y 5% son .04, .94 y .99, respectivamente.

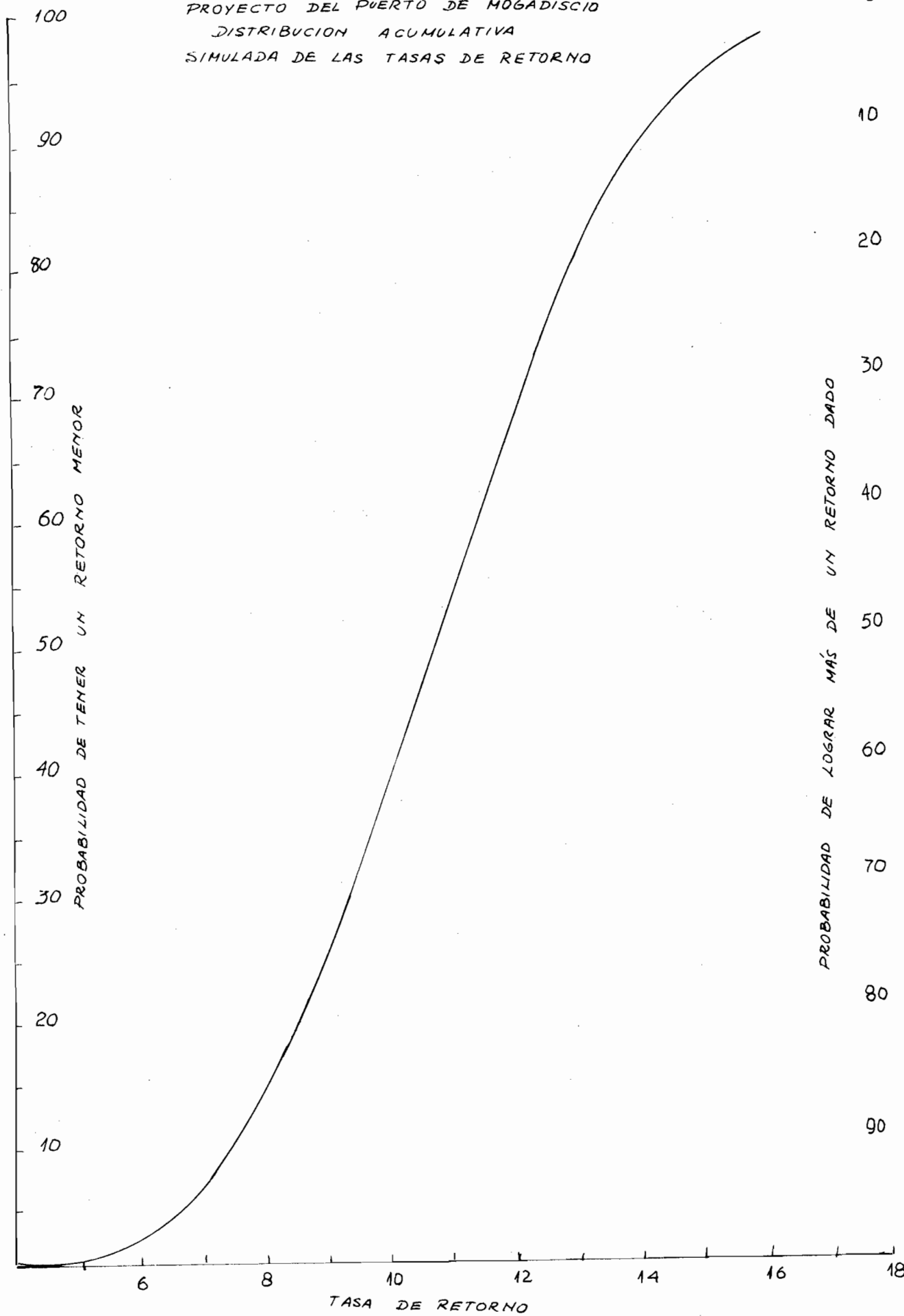
La curva también puede usarse para determinar que la tasa de retorno esté localizada entre dos límites dados, tomando las diferencias entre los valores de la ordenada de los dos puntos extremos; p.ej., la probabilidad que la tasa de retorno sea entre el 10% y el 13%, es del 40%.

El retorno calculado por el análisis tradicional 12,2%, tiene una probabilidad del 70% de no ser alcanzado y por consiguiente 30% de alcanzarlo o superarlo.

El análisis de probabilidad nos da una imagen completa del proyecto y nos habilita para cuantificar el riesgo involucrado. La distribución de probabilidades de la tasa de retorno sintetiza ese riesgo.

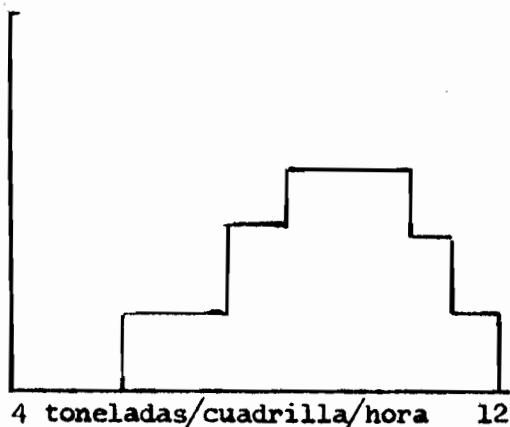
Como usar la distribución de probabilidades de una manera científica todavía no ha sido determinada. Usando una forma pragmática, vemos que el análisis de sensibilidad nos muestra que la Tasa Interna de

PROYECTO DEL PUERTO DE MOGADISCIO
DISTRIBUCION ACUMULATIVA
SIMULADA DE LAS TASAS DE RETORNO

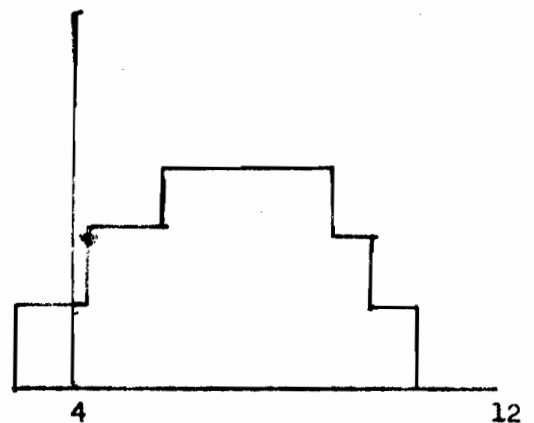


Retorno mínima es 2%, pero dado que tenemos 99% de probabilidad de superar 5%, podemos tomar este valor como mínimo. Pasamos a considerar la tasa del 8%, dado que éste puede ser el costo de oportunidad del capital en Somalia y notamos que existe 15% de probabilidad de no lograr la tasa del 8%, que consideramos aceptable, teniendo en cuenta que el proyecto tiene 20% de probabilidad de superar 13% de rendimiento.

Un importante resultado del análisis de riesgo realizado, fué encontrar un medio de reducir el riesgo del proyecto. Al efectuar un segundo análisis de sensibilidad se encontró que la productividad de la mano de obra tenía una respuesta mayor que en el primer análisis, por cuanto se consideraba su entera variación en lugar del único valor estimado, lo que significaba que el juicio acerca de la distribución de probabilidades de la productividad de la mano de obra era muy optimista. Si la verdadera distribución fuera B y no A, la probabilidad de obtener una Tasa Interna de Retorno inferior al 8% dejaría de ser 15% y pasaría a ser 30%. Si asumimos que la productividad fuera establecida dentro de los límites de 9-10 toneladas/cuadrilla/hora se obtendría una distribución que haría prácticamente desaparecer el riesgo del proyecto.



DISTRIBUCION A (optimista)



DISTRIBUCION B (pesimista)

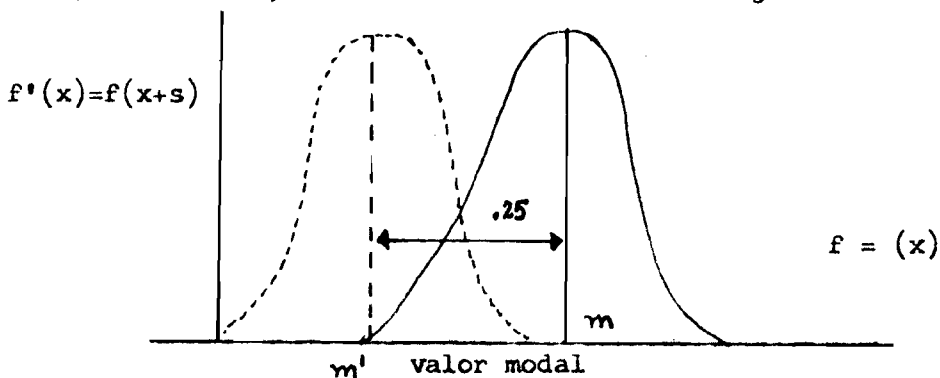
Se sugirió entonces contratar un consultor en el momento oportuno, para organizar las operaciones de manipuleo y ello fué puesto como condición del acuerdo del préstamo.

Una vez establecido el programa, el análisis de riesgo permite luego de cierto tiempo después de la decisión original, hacer rápidamente un nuevo cálculo al recibir nueva información. El análisis de riesgo suministra informes más claros y permite a más personas hacer contribuciones útiles para la evaluación de proyectos. Al poco tiempo de utilizar análisis de riesgo, resulta mucho más fácil expresar juicios en términos de probabilidades que en términos de la mejor estimación.

Una de las dificultades en la toma de decisiones es la estimación del costo de oportunidad del capital, argumento que es utilizado por los partidarios del uso de la Tasa Interna de Retorno. Se sugiere por Pouliquen (19) que en el proyecto de Mogadiscio se podría considerar el costo de oportunidad del capital, como una variable incierta similar a las restantes del proyecto y usar el criterio del Valor Actual Neto.

La probabilidad de fracaso del proyecto aparecería como la probabilidad que el Valor actual neto fuera negativo y la decisión acerca de su aceptabilidad sería muy simple. El uso de la Tasa interna de retorno no es criterio muy bueno para elegir entre alternativas dentro del mismo proyecto, lo mismo que en el caso de proyectos marginales. Ambos casos son particularmente sensibles al análisis de riesgo y en esos casos parece que la alternativa del valor actual neto sería teóricamente más rigurosa y más fácil de implementar en la práctica al par que más apropiada para la toma de decisiones.

Para descubrir el efecto en la distribución de la Tasa Interna de Retorno, de toda posible variación en la distribución de las variables, se practicó un cambio de cuartil en la distribución de cada una de las variables usadas en el proyecto del puerto de Mogadiscio y se comparó (sugerido por D. Hertz) la TIR resultante con la original.



Se cree, a pesar que debe ser investigado con mayor profundidad, que puede ser posible realizar este análisis de sensibilidad a cambios de un cuartil sin tener que repetir realmente la simulación, siendo únicamente necesario extraer de la muestra original, una sub-muestra en la cual una de las variables es distribuida de acuerdo con la distribución modificada.

Esto puede ser factible cuando se usan muestras mayores del orden de 500, que harían posible hacer el análisis de sensibilidad por cambios de un cuartil, sin usar tiempo extra de computador.

Para comprobar el supuesto hecho en el estudio, en que se tomaron como constantes las variables de baja sensibilidad, se efectuó una simulación incorporando a las 7 variables tomadas originalmente, 15 variables más, que se habían considerado constantes. El resultado fue muy similar al original y probó que la simplificación estaba perfectamente justificada (19).

7.4. Análisis de riesgo

La técnica de análisis de riesgo permite el uso de información que de otra forma no sería utilizada. El armazón completo de análisis de riesgo suministra un medio de comunicación altamente eficiente, un punto de mira para evaluación y discusión de proyectos.

El análisis del riesgo exige mayor grado de detalle en el análisis y cuanto menor es el componente, más fácil es formular un juicio. Es más fácil obtener distribución de probabilidades que a primera vista aparecían difíciles. Sin embargo su límite está determinado por la aparición de correlaciones.

A menudo requiere el uso de dosis mayores de criterio que el análisis tradicional. El problema mayor es el tratamiento de correlaciones entre variables, por cuanto los resultados pueden ser completamente diferentes si las correlaciones no son manejadas apropiadamente, por cuanto a menudo se suele pasarlas por alto.

El análisis de riesgo es un método para manejarse con el problema del riesgo. Su propósito es eliminar la necesidad de limitar el análisis a una evaluación con valores unitarios, sean estos optimistas, pesimistas o los más probables.

Para Reuthinger (39) la desventaja del método de simulación es su completa dependencia con la disponibilidad de un computador.

Cada variación en los supuestos exige una nueva pasada del computador. A veces se hace un nuevo estudio en base a los resultados del análisis previo.

Otro problema es la determinación del tamaño óptimo de la muestra. La solución es elegir un tamaño de la muestra relativamente grande o realizar un proceso por etapas verificando si deben efectuarse observaciones adicionales.

En suma el método de simulación es preferible cuando se desea una completa evaluación de probabilidades y a medida que disminuyen los costos de computación es más económico que otros métodos, también da una mejor estimación de la distribución que la que podría resultar de una distribución normal.

Generalmente se considera que la simulación constituye un enfoque realmente diferente para la formulación y análisis de problemas de decisión bajo incertidumbre y que este enfoque es muy fácil de aplicar.

Para Schlaifer (43) el método de simulación no es de ninguna utilidad ya sea para formular un problema de decisión o hacer las evaluaciones básicas que determinan la distribución de probabilidades requeridas para este análisis. Antes que la operación de una estrategia pueda ser simulada, debe ser diagramada ya sea literalmente o dando reglas que la establezcan. Luego que ha sido establecida una completa y exacta determinación matemática del problema, puede llegarse a usar la simulación.

La simulación es pues para Schlaifer un atajo en el trabajo de computación que puede ser o no más económico que otros atajos.

Para Hillier (16) el uso de simulación tiene la ventaja de ser versátil y fácil de entender, lamentablemente tiene un número de serias desventajas que lo hacen poco aplicable para el análisis de inversiones interrelacionadas. Una de las menores de ellas es que la simulación es una técnica imprecisa por cuanto provee solamente estimaciones estadísticas en vez de resultados exactos. En otras aplicaciones estas estimaciones son la media de una distribución, en tal caso los resultados de la simulación tienden a tener unatolerable precisión. Sin embargo las estimaciones de distribuciones de probabilidades son considerablemente menos refinadas, especialmente cuando un extremo de la distribución es crítico.

La simulación es una forma engorrosa de estudiar el problema, por cuanto requiere desarrollar el modelo y los datos, hacer el programa y realizar las corridas del computador. La desventaja mayor es que solo da datos numéricos acerca del comportamiento de proyectos de inversión y no agrega elementos dentro de las relaciones de causa y efecto. (16)

El análisis de riesgo ayuda al ejecutivo a visualizar todos los diferentes resultados que puedan esperarse en una inversión y luego debe decidir basándose en el ingreso posible de obtener y los riesgos involucrados.

Según Carter (62) el pensamiento empresarial ha pasado de la consideración del "retorno" en base a la mejor estimación de los valores de las variables como índice para decisiones de inversiones de capital a considerar el "retorno" junto con la "dispersión de ingresos" en función de todos los valores que se considera asumirán las variables y luego el retorno de la totalidad de las inversiones existentes y proyectadas, con su dispersión. Esto puede hacer que el análisis del riesgo sea más relevante en el futuro para la industria en general, por cuanto las interrelaciones entre propuestas de proyectos de inversión pueden llegar a obtenerse con menor esfuerzo y ser tratadas explícitamente con el enfoque de simulación de portafolio, aplicado a inversiones de capital.

Carter basado en su estudio de las mayores empresas petroleras mundiales sugiere que el análisis del riesgo tiene éxito con mayor facilidad en empresas con una organización descentralizada. Por cuanto es importante que los gerentes divisionales conozcan la técnica y no dependan de asesores externos y favorece notablemente el éxito que se tengan facilidades de computador, sin necesidad de acudir a un sistema de computación centralizado. La falta del conocimiento de la técnica hace que los gerentes divisionales no la entiendan y desconozcan los resultados que pueden ser alcanzados con su aplicación. Los procedimientos normales de encuesta que forman parte de la mecánica del análisis del riesgo -tal el tratamiento de la sensibilidad y las áreas con alta incertidumbre, son considerados- por falta de conocimiento- como amenazantes avances de los asesores o de los técnicos de la administración central.

Si la elaboración de datos se centraliza excesivamente muy pocas personas conocen su composición y pueden presentarse situaciones difíciles. Por el contrario asignando un equipo en cada división para el análisis del riesgo integrado por expertos en finanzas, ingenieros de línea, computación y decisiones, su diversidad permite un trabajo creativo, anticipado un amplio rango de opiniones diferentes, que luego se funden en enfoques más realistas. (62)

Muchos ejecutivos no desean verse forzados a formular estimaciones precisas de probabilidades.

Uno de los beneficios del análisis del riesgo es que muestra el impacto relativo de la incertidumbre en diferentes factores. Así si solamente se obtienen distribuciones imperfectas de algunas variables se puede rapidamente conocer si la empresa debería obtener mejor información -gastando tiempo y dinero- o si los resultados finales no varian apreciablemente a pesar de existir un gran margen de error en los datos de alguna variable.

El mayor beneficio del análisis del riesgo se obtiene en la preparación del modelo, que hace explícita la consideración del riesgo, obliga a pensar en profundidad, pone en perspectiva la importancia relativa de los diversos factores y evidencia los desacuerdos entre los componentes del equipo de estudio.

Según Grayson el análisis de riesgo es muy valioso hasta donde alcanza a cubrir, pero no avanza lo suficiente por cuanto mantiene incierto al empresario ante una distribución de probabilidades alrededor del valor esperado, sin incorporar el riesgo de un modo explícito en el análisis. Se dice que el análisis del riesgo no indica cual debería ser la relación riesgo retorno.

Se reconoce que el análisis del riesgo resulta útil para eliminar proyectos con riesgo mayor e igual retorno que otros, o con menor retorno para igual riesgo, pero que no da normas para determinar el mayor retorno exigible por un riesgo proporcionalmente mayor.

El análisis del riesgo deja en manos del ejecutivo la decisión del tratamiento de la relación riesgo-retorno y ésta es una de sus mayores ventajas pretendidas. Sin embargo se torna en una de sus dificultades mas engorrosas, en tanto los ejecutivos manifiestan ser incapaces de afrontar

el problema de tomar la decisión acerca de la clase de relación riesgo-retorno que ellos quisieran soportar. En este supuesto los ejecutivos tratan de evitar el empleo del criterio directivo empresarial, buscando soslayar el problema de decisión y declinan su ejercicio a un modelo.

Capítulo 8 - TEORIA DE LA UTILIDAD

8.1 Concepto de Utilidad

La teoría de la probabilidad puede cuantificar el grado de incertidumbre asociado con los posibles resultados de un evento, pero no puede medir el sentimiento subjetivo del tomador de decisiones acerca de esos resultados inciertos. La decisión del tomador de decisiones depende en gran medida de su actitud hacia el riesgo.

La expresión en términos monetarios de las consecuencias posibles de un evento no es siempre una guía razonable de acción. La pérdida de +10.000 tiene diferente significado para un empresario de limitados recursos que para una empresa poderosa.

Es también diferente para un individuo que desea tomar grandes riesgos para hacer una fortuna rápidamente, que para otro individuo que espera seguir un camino más lento y seguro en la búsqueda de aumentar su patrimonio. Al utilizar el concepto de utilidad, las consecuencias de un evento ya no se expresan en términos monetarios, sino que se las describe en términos de la utilidad subjetiva que tienen para un individuo o una firma determinada. El valor monetario esperado centra su enfoque en el promedio ponderado, sin considerar la dispersión de los posibles resultados, sin embargo, cuando se está ante límites amplios entre grandes pérdidas y ganancias, las primeras ejercen una fuerte influencia en la decisión individual, a pesar del valor esperado.

El valor de utilidad esperada supera esta objeción por cuanto incorpora estas influencias directamente en el cálculo, asignando mayor o menor utilidad a resultados similares, conforme con la función de utilidad de cada individuo.

En pocas palabras los inversores no intentan optimizar el valor monetario esperado en situaciones de riesgo que, a su juicio, involucran sumas importantes.

La teoría de utilidad cardinal ofrece bases razonables para juzgar la consistencia interna de una serie de decisiones.

La teoría ofrece un camino simple para clasificar diferentes tipos de tomadores de decisiones.

En una situación de riesgo la acción de los ejecutivos es una función de su propio horizonte de planeamiento más que de la situación económico-financiera de la empresa.

Por ello la teoría de la utilidad puede resultar muy valiosa para comunicar a todos los tomadores de decisiones de una empresa la actitud frente al riesgo que sus dirigentes máximos han considerado adecuada. Con ello es posible delegar las decisiones. Una vez que se ha hecho explícita la función de utilidad adoptada por la empresa, es posible tomar decisiones mediante su aplicación por los responsables de cada área en forma consistente con las preferencias de riesgo preestablecidas.

La teoría de la utilidad permite separar dos aspectos subjetivos del problema de decisión; los juicios sobre las probabilidades de los eventos y la actitud frente al riesgo. Con ello es posible clarificar la confusión en que a menudo se los ponía en el pasado.

A pesar de las dificultades prácticas que hacen que su uso sea poco difundido, la teoría de la utilidad tiene mucho que ofrecer como herramienta de predicción y descripción.

Por lo expuesto al tratar decisiones bajo riesgo es necesario explorar a fondo el concepto de utilidad o preferencia.

El matemático Daniel Bernoulli fué uno de los primeros en presentar la idea general de introducir en el cálculo de expectativas valores subjetivos más bien que valores monetarios.

El propuso convertir los valores monetarios en valores de utilidad utilizando una curva logarítmica -la ahora familiar curva de la utilidad marginal decreciente- para determinar el valor de utilidad esperado, que él denominaba "expectativa moral". Las posibilidades respectivas tienen que ser multiplicadas por la utilidad que representen los valores monetarios de las consecuencias. Si bien las ideas de Bernoulli son sumamente útiles para la determinación de estos valores subjetivos, como él suponía que la curva de utilidad marginal representaba las curvas de todos los individuos, ésta resulta en consecuencia ineficiente como guía de acción para cada individuo en particular.

Más tarde los conceptos de utilidad fueron desarrollados por von Neumann-Morgenstern con un sistema para determinar la función individual de utilidad. Se le presentan a un individuo una serie de hipotéticas situaciones solicitándosele que haga una elección al respecto. Cuando el individuo contesta, lo hace como una persona que tiene determinado monto de fondos, ciertos objetivos y ciertas preferencias para la toma de riesgos, estas respuestas son exclusivas de él y pueden ser acondicionadas de manera que la función individual de utilidad se lleve a un gráfico.

En consecuencia, para determinar el valor esperado de utilidad de un juego para ese individuo, sus utilidades personales para diversas consecuencias monetarias se multiplican por la probabilidad de los respectivos eventos.

En realidad sus valores de utilidad individuales, son tomados implícitamente en consideración en todas las decisiones que el empresario realiza. Von Neumann-Morgenstern solamente propusieron un método para determinar explícitar sus valores para poderlos usar como guía de acción consistente. La consistencia permite a una persona trabajar en la manera más efectiva hacia cierta meta. La inconsistencia hace que una persona actúe en formas opuestas a las de acciones previas, que posiblemente ten-

gan como consecuencia anular anteriores ganancias; la inconsistencia también lleva a frustraciones al actuar de una manera e inmediatamente después en otra, lo cual crea confusión y tensión dentro del individuo. El hecho de que la acción consistente para maximizar la utilidad esperada sea propuesta como una guía recomendada o normativa, no significa que todas las personas son consistentes (13).

El moderno concepto de utilidad busca incorporar las preferencias de riesgo de la persona, en una forma explícita al procedimiento de decisión.

Las funciones de utilidad mudan de configuración según el individuo.

La utilidad de Von Neumann-Morgenstern no es un renacer del concepto de los economistas de la utilidad como una cantidad física que era medida hasta una transformación lineal positiva. La utilidad de von Neumann-Morgenstern también mensurable, no es una cantidad física y puede ser usada sólo para determinar elecciones o preferencias en situaciones definidas probabilísticamente.

Según Mao (23) el índice de utilidad de von Neumann-Morgenstern debería diferenciarse del concepto de utilidad cardinal expuesto por Alfredo Marshall y del concepto de utilidad ordinal de Allen y Hicks. Para Marshall y otros teóricos de la utilidad cardinal, ésta es una cantidad física mensurable y cuantificable.

La curvatura de la curva de la demanda del consumidor se derivaba de la ley de utilidad marginal decreciente y esta interpretación de la utilidad cardinal dió pié a la interpretación de la utilidad como comportamiento ordinal. Así en 1934 Allen y Hicks construyeron una teoría del comportamiento del consumidor sin asumir que la utilidad fuera una cantidad mensurable.

Von Neumann-Morgenstern en su esfuerzo por interpretar las decisiones bajo riesgo descubrieron la idea de evaluar la aversión al riesgo, asignándole al evento la utilidad de su equivalente de certeza.

Las diferencias con sus predecesores consisten en que el moderno concepto de utilidad desarrollado por von Neumann-Morgenstern es mensurable, lo que la diferencia de la utilidad ordinal de Allen y Hicks. A pesar de ser ambas mensurables tiene poco en común con la utilidad cardinal de Marshall, por cuanto para éste la utilidad es una cantidad psicológicamente medida por el placer y la pena, en tanto que el concepto de von Neumann-Morgenstern es un índice numérico para evaluar transacciones en condiciones de incertidumbre.

Van Horne (50) siguiendo a von Neumann-Morgenstern afirma que a través de la determinación de la utilidad cardinal podemos derivar un índice de utilidad para los individuos.

Nosotros medimos utilidad relativa y no utilidad absoluta. Los valores de utilidad son asignados arbitrariamente a dos sumas de dinero y la escala no tiene origen natural.

Según Swalm (100) la teoría de la utilidad esperada demuestra su eficacia en la descripción y predicción de la conducta del tomador de decisiones.

Raiffa citado por Swalm sin embargo, critica esto e insiste en que la teoría es normativa, indica la forma en que los ejecutivos deberían comportarse y no su comportamiento real. Sugiere que se necesita una teoría más sujeta a comprobaciones empíricas. Es una teoría que implica aconsejar a cualquiera de sus adeptos sobre la manera en que debería actuar en situaciones complicadas, siempre que sea capaz de decidir de manera coherente en situaciones relativamente simples.

Según Raiffa la gente no siempre se comporta de una manera consistente que maximice su utilidad y esto demuestra lo importante que

es tener una teoría que pueda emplearse para ayudar a tomar decisiones en caso de incertidumbre.

El argumento es que si los empresarios no fueran tan poco conscientes y se comportaran en forma perfectamente racional no sería necesaria una teoría prescriptiva, solamente sería suficiente que actuaran naturalmente. Y sabiendo esto, al enfrentarnos con un problema importante y complicado, algunos de nosotros podríamos desear emplear, de una manera conciente, auxiliares para la toma de decisiones que ayudaran a controlar nuestras contradicciones y a guiarnos hacia una conducta adecuada. La teoría de la utilidad pretende ser tal auxiliar.

Swalm cita como otras opiniones que sustentan un punto de vista contrario, según Bierman.

"- La medida de utilidad de von Neumann-Morgenstern es un tipo especial" "de unidad cardinal... El uso de la misma nos permite predecir cuál de" "entre diversas chances preferirá una persona..."

Y a Karl Borsch que afirma:

"- que podemos predecir como un tomador de decisiones actuará ante una" "determinada situación, si conocemos las reglas que observará un ser " "racional cuando tiene que tomar decisiones en casos de incertidumbre".

Dice Swalm que los resultados de los experimentos de las apuestas sobre la extracción de bolillas de color son mucho menos representativas de las situaciones por las que atraviesa la industria, que un examen directo del grado en que puede emplearse una función de utilidad teórica derivada de preguntas razonablemente realistas para predecir las reacciones de un empresario ante problemas diferentes.

Al tomar sus decisiones diarias los empresarios utilizan enfoques que pueden ser descriptos como modelos en supuestas hipótesis de certeza y no es frecuente que explícitamente utilicen enfoques que tengan en cuenta el riesgo.

Se dice que como la mente humana tiene capacidad limitada para absorber información, la incertidumbre se suprime en el análisis en función de simplificaciones conceptuales o modelos de la realidad. Se estudia la decisión como si el futuro fuera cierto. Se afirma también que el riesgo se presenta recién al final del análisis, interpretando el índice de rentabilidad resultante sobre las condiciones de un mundo incierto y de ahí la indiferencia hacia la incertidumbre en la determinación de los flujos de fondos.

Luce & Raiffa (22) consideran desafortunado que von Neumann Morgenstern emplearan la palabra utilidad para el concepto por ellos creado, por cuanto ha habido en el pasado tantos usos y malentendidas apreciaciones de diversos conceptos, todos llamados "utilidad", que su utilización se presta a confusión. Hammond (71) prefiere usar el término "teoría de la preferencia" para evitar el reiterado y diverso uso del primero en la literatura económica.

8.2. Valor monetario Esperado y Utilidad Esperada

En general se considera que en el análisis de decisiones que implican incertidumbre los individuos y las empresas tratan de seguir aquellos cursos de acción que tengan el mayor valor esperado de ingresos netos. Si consideramos que para ello deben utilizarse las posibles utilidades cuantificando sus respectivas probabilidades de ocurrencia podemos afirmar que el tomador de decisiones utiliza "los promedios" en todas las negociaciones. No se consideran pues las potenciales consecuencias negativas que ello puede originar.

Sin embargo, muy pocos ejecutivos enfrentan el riesgo en la forma descripta al tomar decisiones importantes en sus negocios.

Lo que ocurre es que falta considerar en el planteo, la incorporación de la actitud frente al riesgo del tomador de decisiones.

El valor monetario esperado ignora un importante factor en el tratamiento del riesgo, la actitud hacia el riesgo de la gente o más específicamente hacia ganancias o pérdidas monetarias de diferentes montos.

El procedimiento es subjetivo, el desarrollo de una función de utilidad individual, es averiguar sus preferencias entre varios grupos de hipotéticas alternativas que incluyan ganancias y/o pérdidas monetarias.

Se cambia el valor monetario esperado por valor de utilidad esperado, el valor monetario esperado llevará a las mismas decisiones que el valor de utilidad esperado dentro de cierto radio de ganancias y pérdidas potenciales y puede el primero constituir una guía perfectamente válida, este "radio" podría considerarse el patrón normal de riesgo de las opciones de inversión de la firma.

No obstante cuando la inversión implica un riesgo fuera de lo ordinario o quede fuera del radio "normal" de ganancias y pérdidas potenciales, caben otras preferencias de riesgo y debe computarse el valor de utilidad esperado.

Es decir, para inversiones relativamente pequeñas, esencialmente independientes de otros activos (económica y estadísticamente) y con una pequeña varianza en los resultados el uso del Valor monetario esperado es un procedimiento razonable.

No importa cuan grande es la firma, hay ciertas oportunidades de inversión que no serían consideradas en una base estricta de valor monetario esperado, el análisis de riesgo sería efectuado por análisis de utilidad. Ello ocurre cuando hay eventos de tal magnitud que pueden resultar desastrosos para la firma.

Para cualquier individuo cuyas preferencias pueden ser expresadas por una utilidad según la describe von Neumann-Morgenstern, la elección es hecha sobre la base de la utilidad esperada.

Si tenemos 2 alternativas A, cuyos resultados son $x_1, x_2 \dots x_n$ con las probabilidades asociadas $p_1, p_2 \dots p_n$ y B cuyos resultados son $Z_1, Z_2 \dots Z_n$ con las probabilidades asociadas $p'_1, p'_2 \dots p'_n$ es elegido A siempre que

$$U_A = \sum_{i=1}^n U_i P_i \quad \text{y} \quad U_B = \sum_{j=1}^n U_j P'_j$$

U_i y U_j son las utilidades de los resultados.

El uso del concepto del valor de utilidad esperado como una guía de decisión tiene también otra ventaja sobre el valor monetario esperado. A menudo ha sido criticado el uso del valor monetario esperado por cuanto pasa por alto la resultante de una variación muy amplia de ingresos sobre la acción individual y su valor es en realidad un promedio ponderado; consecuentemente centra la atención en el valor promedio resultante, sin embargo, los límites de los posibles flujos de fondos pueden fluctuar entre una gran pérdida y una ganancia importante, lo cual ejerce fuerte influencia en las decisiones del individuo.

El valor de utilidad esperado supera esta objeción al incorporar esta influencia de las variaciones directamente en los cálculos de dichos valores.

Podemos usar un procedimiento alternativo al análisis de utilidad describiendo el tipo de inversión aceptable en cuyo caso se hace sentir su influencia al fijar p.ej.: Valor Monetario Esperado pero sin que haya una probabilidad mayor de X% de perder una suma mayor de \$Z(5).

Markowitz (25) destaca que las más relevantes argumentaciones en contra de la utilidad máxima esperada surgen de casos en que los individuos eligen alternativas inconsistentes con dicho criterio. Por tanto se saca como conclusión que la utilidad máxima esperada no es el criterio del comportamiento racional o bien que los seres humanos tienen una natural propensión hacia la irracionalidad, cita un ejemplo:

Se tiene que elegir entre,

<u>Alternativa</u>	<u>Posibilidades</u>	<u>Ingresos</u>	<u>Valor Monetario Esperado</u>
		\$	
A 2/2000	1.000	\$1.-
 1998/2000	0	<u>-.-</u> \$1.-
B 20/2000	100	\$1.-
 1980/2000	0	<u>-.-</u> \$1.-
C 1/2000	1.000	\$0,50
 10/2000	100	\$0,50 \$1.-
 1989/2000	0	<u>-.-</u>

En general la mayoría de los individuos muestran una definida preferencia por la alternativa C, pero esta alternativa es contraria a las reglas de la utilidad esperada.

$$U_C = \frac{1}{2000} U(\$1.000) + \frac{1}{200} U(\$100) + \frac{1989}{2000} U(\$0) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1.000} U(\$1.000) + \frac{999}{1.000} U(\$0) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{10}{1.000} U(\$100) + \frac{990}{1.000} U(\$0) \right]$$

$$U_C = \frac{1}{2} U_A + \frac{1}{2} U_B$$

De donde U_C no puede ser mayor que U_A y U_B .

Surge la pregunta si el que está equivocado es el individuo que elige C o el criterio de la utilidad máxima esperada.

Si pedimos la preferencia entre A y B y suponemos que se prefiere A, consecuentemente prefiere A a una lotería de tener A ó B. La alternativa de arrojar una moneda entre A y B tiene probabilidades ciertas de obtener \$1.000.-, \$100.- ó \$0.- La probabilidad de ganar \$1.000.-

es igual a la probabilidad de sacar la lotería A por la probabilidad de ganar \$1.000.- si se obtiene A, o sea.

$$P \$1.000 = \frac{1}{2} \frac{2}{2.000} = \frac{1}{2.000}$$

igualmente,

$$P \$ 100 = \frac{1}{2} \frac{20}{1.000} = \frac{10}{2.000}$$

y finalmente $P \$0 = 1 - \frac{1}{2.000} - \frac{10}{2.000} = \frac{1.989}{2.000}$ que es exactamente igual a la alternativa C, de donde podemos expresar las preferencias individuales de la siguiente manera.

C es preferido a A; A es preferido a una probabilidad 50-50 de A ó B, pero una probabilidad 50-50 de A ó B es lo mismo que C. Entonces A es preferido a C, lo que constituye una inconsistencia.

Allis autor de otros dos ejemplos citados por Markowitz, concluye que los individuos que eligen la alternativa errónea actúan irracionalmente. Markowitz por su parte aclara que si cuando las probabilidades son presentadas de una manera, el individuo prefiere una distribución y cuando son presentadas en otra manera diferente prefiere la otra distribución, sus preferencias no son solamente inconsistentes con la utilidad máxima esperada, sino que también son inconsistentes entre ellas.

Para definir que entendemos como comportamiento razonable es necesario fijar un conjunto de principios básicos y luego limitar nuestras discusiones a los principios aceptados.

8.3 Adversión al riesgo

Uno de los conceptos modernos en el análisis cuantitativo de los problemas de administración de empresas es facilitar el análisis de

los problemas de administración de empresas es facilitar el análisis de la actitud frente al riesgo de los tomadores de decisiones y desarrollar la consistencia de sus decisiones.

Una persona siente aversión ante el riesgo cuando ante dos rendimientos con el mismo valor monetario previsto, elige aquel que tiene menos riesgo. El riesgo podría definirse como cierta función de la dispersión de las distribuciones subjetivas de la probabilidad de los rendimientos previstos.

Sin embargo, no se puede generalizar la aversión ante el riesgo si como es notorio las personas apuestan. Describir las preferencias de un individuo en términos de ingresos monetarios contrapuestos al riesgo resulta desacertado en el caso de las apuestas.

Para muchas personas las apuestas le proporcionan un placer o agradable excitación y el simple hecho de apostar les brindan satisfacciones que les hacen superar las actitudes básicas de aversión ante el riesgo, máxime si las sumas apostadas son pequeñas en comparación con la riqueza total del apostador (5).

Hirschleifer (17) hace nota que debe reconocerse que mucha gente tiene placer en jugar "per se", como un artículo de consumo.

Un monto pequeño de juego orientado por el placer de jugar no sería entonces inconsistente con la aversión al riesgo de las actividades orientadas a la obtención de riqueza.

Para hacer esta distinción utilizable debe ser posible distinguir objetivamente el jugar por placer del jugar buscando ganancias. Podemos definir este último como el deliberado intento de cambiar el status de riqueza.

El juego orientado a la obtención de ganancias toma la forma de fuertes apuestas en pocos eventos. El jugar repetidamente pequeñas sumas aseguraría una alta probabilidad para el jugador que el resultado final fuera una pérdida limitada (el precio pagado por el placer de jugar), todo lo contrario de lo buscado por el jugador que busca la obtención de grandes ganancias.

Excluimos de toda argumentación un comportamiento patológico del jugador del tipo que describiera Dostoyevsky.

En general las curvas de individuos adversos al riesgo muestran una aversión al riesgo decreciente lo que significa que a medida que su posición final de activos aumenta disminuye el premio de riesgo que está dispuesto a pagar, por una diferencia constante en valores monetarios entre alternativas a elegir.

Este fenómeno de la aversión al riesgo decreciente es la que hace que Hammond aconseje utilizar las consecuencias de las decisiones en términos de activos totales en vez de flujos de fondos incrementales (71).

La teoría de la utilidad no es la única que puede expresar las preferencias de riesgo, tal como lo indica Grayson (40) otra estructura teórica es la de las curvas de indiferencia.

Para la teoría de la utilidad el objetivo es maximizar la utilidad esperada. Si la función de utilidad de un individuo es lineal, la utilidad esperada se hace máxima cuando se hace máximo el valor monetario esperado.

Si la función de utilidad es curvilínea puede ser aproximada en la mayoría de los casos por una función cuadrática, en la que la utilidad esperada es una función de la media y de la varianza de los ingresos.

La utilidad esperada $E(U) = U_0 + a_1 E(I) + a_2 \left[V(I) + (E(I))^2 \right]$
 en la que (U) es la utilidad,

(I) es ingreso

E(I) media

V(I) varianza

)

o

)

De las probables distribuciones del ingreso

El individuo conservador (con aversión al riesgo) tendría una función de utilidad que aumenta a una tasa decreciente tal que

$a_2 < 0$, de donde la utilidad esperada es una función decreciente de la varianza (cuanto mayor riesgo, menor utilidad esperada). Lo contrario ocurre con el individuo afecto al riesgo la utilidad esperada es una función creciente de la varianza del ingreso y su función de utilidad crece a una tasa creciente y la utilidad esperada es una función creciente de la varianza del ingreso.

Es opinión unánime entre los autores que los inversionistas en general sienten aversión al riesgo. La tesis tradicional sobre la estructura del capital presupone también la aversión al riesgo. La utilidad marginal del dinero es decreciente, aunque sea siempre positiva (41).

Si tenemos un juego con dos valores terminales con 50% de probabilidad de ocurrencia cada uno, el monto por el cual el valor terminal del equivalente de certeza difiere del promedio aritmético de los dos valores terminales igualmente probables, se llama premio al riesgo que será:

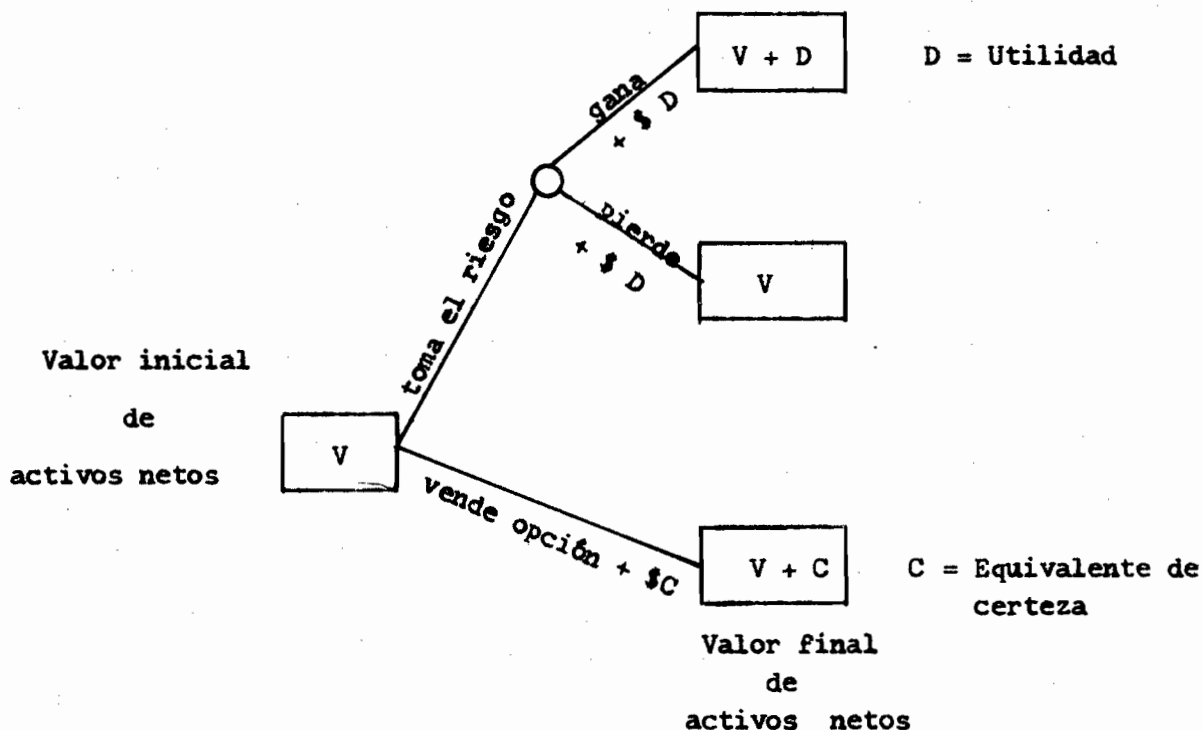
positivo si el individuo es adverso al riesgo

cero si el individuo es neutral al riesgo

negativo si el individuo es afecto al riesgo

Aversión al riesgo decreciente

Descripción de un juego y su equivalente en certeza:



El promedio de los 2 posibles valores terminales es $\frac{1}{2}V + \frac{1}{2}(V+D) = V + \frac{1}{2}D$, el premio de riesgo por el juego es igual al promedio menos el equivalente de certeza

$$(V + \frac{1}{2}D) - (V+C) = \frac{1}{2}D - C$$

D es la diferencia entre los 2 posibles valores terminales y la diferencia $\frac{1}{2}D - C$ es el premio por aversión al riesgo que el tomador de decisiones está dispuesto a soportar. Para muchos tomadores de decisiones, cuando V aumenta, el equivalente de certeza C por el cual venderían la opción, tiende a igualarse a $\frac{1}{2}D$.

Dicho premio sería siempre positivo pero decrecería continuamente hacia 0, si aumenta el menor de los dos valores terminales posibles que pueden resultar del juego, mientras la diferencia entre dichos dos valores terminales posibles permanezca fija. Se refiere a ello como aversión al riesgo positivo pero decreciente o sea, que su grado de concavidad tiende a ser menor (43).

8.4 Función de utilidad

Con la teoría de la utilidad se procura analizar la actitud del hombre racional ante el riesgo. Con suma frecuencia se verifica que se eligen alternativas que no son aquellas que tienen el valor monetario esperado más elevado; por medio de esta teoría se trata de buscar el fundamento que explique esta actitud ante el riesgo y lo que es más importante poder predecir el comportamiento futuro ante situaciones similares.

La teoría de la utilidad cardinal procura explicar más adecuadamente la actitud del hombre ante situaciones riesgosas e intenta optimizar una relación entre utilidad y dinero.

De acuerdo con la teoría, cada individuo tiene una preferencia mensurable entre diversas elecciones cuando se encuentra frente a situaciones de riesgo. A esta preferencia se la llama su "utilidad".

En cualquier decisión que implique peligro, cada hombre elegirá aquella alternativa que le ofrezca mayor "utilidad". Una vez conocida su función de utilidad, las probabilidades que asigne a los acontecimientos en una situación de toma de decisiones, y las consecuencias de cada posible éxito, podremos predecir su elección en cada caso, puesto que tratará de maximizar su propia utilidad.

Mientras las utilidades relativas son mensurables las utilidades absolutas no lo son.

Las escalas de utilidades son personales y subjetivas y no necesariamente las de una persona debe coincidir con la de otra. El método moderno del análisis de curvas de indiferencia es un procedimiento matemático para describir esta situación. Todo esto nos trae el recuerdo de las condiciones existentes al comienzo de la teoría del calor, que

estaba basada en claro concepto intuitivo de un objeto que se sentía más caliente que otro, aunque no existía por ese entonces un medio inmediato de expresar significativamente, cuánto más calor o cuantas veces. Esta comparación con la teoría del calor nos muestra que poco se puede pronosticar a priori cual será la formulación última de una teoría como ésta. El desarrollo de la teoría del calor nos indica que se debe ser extremadamente cuidadoso en hacer afirmaciones negativas acerca de cualquier concepto con la pretensión de que sea definitivo. Aún cuando las utilidades parezcan hoy no numéricas, puede repetirse lo ocurrido con la teoría del calor y nadie puede predecir con qué ramificaciones y variaciones.

Lo mismo que las probabilidades subjetivas pueden ser usadas para describir las actitudes de una persona acerca de la probabilidad que un hecho ocurra, la función de utilidad puede describir su actitud y preferencias frente al riesgo.

Es pues una herramienta práctica ya sea como procedimiento explícito para arribar a una decisión o como una explicación implícita de como el tomador de decisiones debe considerar todo los posibles eventos de una inversión y no solamente el valor monetario esperado.

Hammond (71) desarrolla los criterios de la teoría de utilidad y les da nuevas dimensiones tratando de guiar el comportamiento permitiendo que el tomador de decisiones realice mejores decisiones. En cierta forma critica a Swalm diciendo que en su enfoque se limita a explicar o describir el comportamiento de los individuos.

Si los índices de utilidad son usados como un medio de describir las preferencias del tomador de decisiones en situaciones de riesgo resulta pues importante establecer si es posible determinar esas preferencias. Una posibilidad es usar un enfoque inductivo a través de la experimentación tales como los estudios realizados por Swalm y Grayson.

La otra alternativa es a través de deducción. Es posible probar que si ciertos axiomas sobre las preferencias de los individuos son válidos entonces existe una función de utilidad que describe sus preferencias, además ello puede ser determinado empíricamente (9).

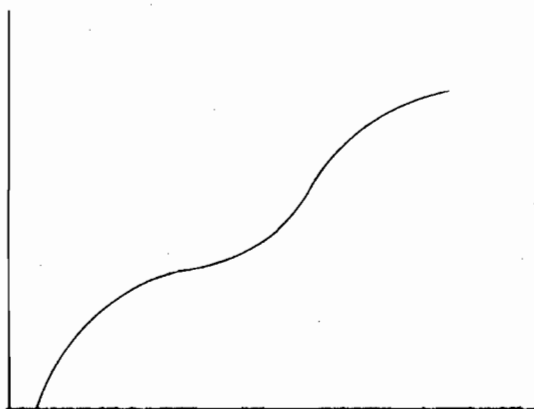
8.5 Supuestos necesarios para describir las preferencias

Friedman y Savage (69) consideran que se puede llegar a una generalización del comportamiento de los individuos en la elección de alternativas si se presupone que estos se comportan de manera que:

- 1- Tienen un conjunto consistente de preferencias
- 2- Estas preferencias se pueden describir asignando un valor numérico de utilidad a cada alternativa.
- 3- Entre alternativas sin riesgo siempre se elige aquella con la mayor utilidad.
- 4- Entre alternativas con riesgo siempre se elige aquella cuya utilidad esperada es la mayor.
- 5- La función de utilidad de ingresos monetarios tiene en general las siguientes propiedades:
 - a. la utilidad aumenta con el ingreso, por tanto la utilidad marginal del dinero es siempre positiva.
 - b. la función es convexa (desde arriba) por debajo de cierto ingreso, cóncava entre ese ingreso y otro ingreso mayor y convexa para los ingresos elevados. Es decir, la utilidad marginal monetaria es decreciente, creciente y decreciente en ese orden.
- 6- La mayoría de los individuos tienden a tener ingresos que los ubican en los segmentos convexos.

El punto 4 es el concepto expuesto por von Neumann-Morgenstern y los puntos 5b y 6 son el resultado del enfoque de Friedman y Savage.

El punto 5b se deduce de la observación que, a) los individuos de menores ingresos toman o desean tomar seguros, b) los individuos de menores ingresos compran o desean comprar billetes de lotería, c) muchos individuos toman o desean tomar y comprar, seguros y billetes de lotería, d) las loterías generalmente tienen más de un premio. Una interpretación posible de los 3 segmentos de la curva de utilidad descrita por Friedman y Savage es que los segmentos en que la utilidad marginal es decreciente corresponden a clases socio-económicas y el segmento intermedio es una etapa de transición entre una clase de bajos ingresos y una de ingresos mayores.



Von Neumann-Morgenstern han demostrado que si una persona es capaz de expresar preferencias entre pares de juegos posibles tomando ciertos conjuntos básicos de alternativas, se puede introducir asociaciones de utilidades a las alternativas básicas, de manera tal que, si la persona es guiada por el valor de utilidad esperada actúa de acuerdo con sus verdaderas preferencias siempre que haya consistencia en sus decisiones.

No deseamos decir que prefiere A a B, porque A tiene la mayor utilidad, más bien asignamos a A la mayor utilidad porque A es preferido a B.

La naturaleza general del conjunto de requisitos de consistencia pueden ser sugeridos por unas pocas e intuitivas palabras descriptivas.

- i) El individuo siempre preferirá entre dos alternativas una sobre otra o será indiferente entre ambas.
- ii) Las relaciones de preferencia o de indiferencia en loterías son -transitivas, o sea, si se prefiere A a B y B a C, entonces A será preferido a C. Asimismo, si se es indiferente entre A y B y entre B y C, habrá indiferencia entre A y C.
- iii) Si una lotería tiene como una de sus alternativas otra lotería, la primera es entonces descomponible en las alternativas básicas de la otra lotería mediante el uso del cálculo de probabilidad.
- iv) Si el sujeto es indiferente entre dos loterías, entonces éstas son intercambiables como alternativas en cualquier lotería combinada.
- v) Si dos loterías comprenden las mismas dos alternativas, será elegida aquella en la que la alternativa más preferida tenga la probabilidad mayor de ocurrencia.
- vi) Si A es preferida a B y B a C, existe una lotería que comprenda a A y C con las probabilidades apropiadas, que sea indiferente a B.

A la vista de estos axiomas podemos efectuar algunas interpretaciones de ellos. Supongamos que se tiene que elegir entre un par de loterías cada una de ellas compuestas por complicadas alternativas en situación de riesgo y que en razón de su complejidad resulte extremadamente difícil decidir cual es la preferida. Un procedimiento natural es analizar cada lotería descomponiéndola en alternativas simples para tomar decisiones y preferencias entre esas alternativas y estar de acuerdo sobre ciertas reglas de consistencia que relacionan las decisiones simples a las decisiones más complicadas.

De esta manera una relación de consistencia es impuesta sobre las elecciones entre alternativas complicadas.

Luce & Raiffa (22) dan forma a estos seis axiomas:

SUPUESTO I: ORDENAMIENTO DE ALTERNATIVAS

Si $A_i \succsim A_j$ y $A_j \succ A_k$ entonces $A_i \succsim A_k$

El simbolismo $A_i \succ A_j$ significa que A_j no es preferido a A_i , también podemos decir que A_i es preferido e indiferente a A_j .

SUPUESTO II:

Cualquier lotería compuesta puede ser reducida a una lotería simple computando sus probabilidades y esperanzas matemáticas.

SUPUESTO III: CONTINUIDAD

Si $A_1 \succ A_i \succ A_r$

$[p A_1, (1-p) A_r]$ es preferido a A_i si p está muy cerca de 1 y a la inversa si p está cercano a 0 y hay un punto de inversión o indiferencia para un valor de p entre 1 y 0.

Por conveniencia escribimos $A_i \sim [u_i A_1, (1-u_i) A_r] = \tilde{A}_i$ pero debe tenerse presente que A_i y \tilde{A}_i son dos entidades diferentes.

SUPUESTO IV: SUSTITUTIBILIDAD

En cualquier lotería \tilde{A}_i es sustituible por A_i este supuesto tomado con el III hace recordar a lo que es conocido en otras palabras como la independencia de alternativas irrelevantes.

SUPUESTO V: TRANSITIVIDAD

Preferencia e indiferencia entre loterías son relaciones transitivas.

SUPUESTO VI: MONOTONIA

Una lotería $[p A_1, (1 - p) A_r]$ es preferida o indiferente a $[p' A_1, (1 - p') A_r]$ si y solo si $p \geq p'$. Entre dos loterías que comprenden solamente la alternativa mejor y la menos preferida, se elegirá aquella en que es más probable la alternativa mejor.

No debe dejarse de considerar que si hay una interacción psicológica entre las alternativas básicas y las probabilidades, puede llegar a ser necesario tener que usar un conjunto más preciso y abundante de alternativas básicas para que el supuesto VI sea válido.

Los cinco primeros supuestos nos permiten reducir dos loterías L y L' a la forma del axioma VI y decidir entre ambas aplicando dicho axioma:

Si tenemos lotería $L = (p_1 A_1, \dots, p_r A_r)$
y lotería $L' = (p'_1 A_1, \dots, p'_r A_r)$

Calculamos:

$$p_1 U_1 + p_2 U_2 + \dots + p_r U_r \quad \text{y} \quad p'_1 U_1 + p'_2 U_2 + \dots + p'_r U_r$$

Y si la primera es mayor que la segunda preferiremos L a L' ; en el caso inverso preferiremos L' y si las dos son iguales L y L' serán indiferentes.

Dicho en términos más precisos si la relación de preferencia o indiferencia \succsim satisface los axiomas I a VI, hay números U_i asociados con los premios A_i , tales que para las dos loterías L y L' las magnitudes de los valores esperados reflejan la preferencia entre ellas.

ALGUNAS FALACIAS COMUNES

FALACIA I: $(p_1 A_1 \dots p_r A_r)$ es preferido a $(p'_1 A_1 \dots p'_r A_r)$ porque la utilidad de la primera $p_1 U_1 + \dots p_r U_r$ es mayor que la utilidad de la segunda $p'_1 U_1 + \dots p'_r U_r$.

La teoría es una descripción de preferencias en cuyo caso la relación causal es exactamente la opuesta de la verdad. La preferencia entre loterías preceden a la introducción de la función de utilidad. Debemos pensar en la teoría como una guía de acción consistente.

FALACIA II: Supuesto que $A \succ B \succ C \succ D$ y que las utilidades de estas alternativas satisfagan la igualdad $u(A) + u(D) = u(B) + u(C)$, entonces $\frac{1}{2}B \frac{1}{2}C$ sería preferido a $\frac{1}{2}A \frac{1}{2}D$ porque a pesar de tener la misma utilidad esperada la primera tiene la menor varianza de utilidades.

Es una interpretación completamente errónea de la noción de utilidad que proviene de olvidar que las preferencias preceden a las utilidades.

FALACIA III: Supuesto que $A \succ B \succ C \succ D$ y que la función de utilidad tiene la propiedad que

$$u(A) - u(B) > u(C) - u(D),$$

entonces el cambio de B a A es preferido al cambio de D por C.

Si consideramos que la función de utilidad está basada en preferencias entre pares de alternativas y no entre pares de pares de alternativas, es evidente que no se justifica el enunciado.

FALACIA IV: Es muy importante y en muchos aspectos un problema no resuelto. Hay un punto que debe ser remarcado: "La individualidad de la función".

Los seis axiomas de consistencia determinan una función de utilidad que es única entre sus puntos 0 y 1.

Si tomamos cualesquiera dos alternativas que no sean indiferentes siempre podremos fijar en 0 la utilidad de la menos preferida y en 1 la utilidad de la otra, lo que ocasiona dificultades y confusión es que la unidad de medida es arbitraria para cada individuo y no son por tanto comparables.

En la teoría de la utilidad si quisiéramos comparar las utilidades de dos individuos, no podríamos hacerlo por cuanto no conocemos la relación entre las dos unidades de medida usadas.

En un juego entre un hombre muy rico y otro muy pobre al nivel de $-\$100.- + \$100.-$, se hace incomprensible creer que la utilidad de $\$100.-$ sea igual para ambos. Es obvio que el hombre más pobre será de lejos más sensible a cambios que involucren una suma fija de dinero que el hombre rico.

El problema de la comparación interpersonal de utilidades no ha sido resuelto y por tanto no podemos afirmar que tal comparación sea posible, lo que se traduciría en una debilidad de la teoría (22).

No pueden ser usadas las funciones de utilidad como la base para afirmar que una consecuencia dada es más o menos valiosa para un hombre que para otro, si con ello queremos significar que uno de los dos hombres realmente necesita más el dinero que el otro o que el dinero hará más bien a uno que a otro. No podemos decir que si el Señor A pierde $\$100.-$ y se reduce su utilidad en .5 utilas y si el Señor B gana $\$100.-$ y se aumenta su utilidad en .7 utilas, habrá una utilidad social trasladando $\$100.-$ del Señor A al Señor B. Todo lo que podemos decir es que un hombre se comportará diferente de otro cuando se enfrente con opciones bajo condiciones de incertidumbre.

Los problemas éticos y sociales no pueden ser manejados por los métodos de la teoría de la utilidad.

Según Schlaifer debemos también estar prevenidos contra una interpretación común del significado de la teoría de la utilidad y recordar que las utilidades de dos consecuencias separadas jamás pueden ser sumadas para obtener la utilidad de las dos consecuencias juntas.

Al asignar probabilidades a cada evento, debe evitarse la confusión del criterio del ejecutivo al asignar probabilidades, con su actitud frente al riesgo, pues se corre el peligro de computar doblemente el riesgo.

Es absolutamente necesario que se piense acerca de las probabilidades de ocurrencia de un evento cuando se están asignando sus posibilidades, sin tener en cuenta la deseabilidad o no, de la consecuencia resultante.

Paralelamente al construir la curva de preferencia es también absolutamente necesario que se piense solamente acerca de cuales serían sus actitudes al pedirle que establezca un equivalente de certeza.

Una dificultad con los supuestos suficientes para la teoría de la utilidad aparece cuando ingresos extremadamente desfavorables se encuentran involucrados muy cercanos a los límites de la función de utilidad.

Tales son los casos de muerte, bancarrota, ruina, guerra; muy cerca del extremo inferior de la función de utilidad donde el tomador de decisiones no es capaz de distinguir en forma fehaciente pequeñas diferencias en probabilidades que producen cambios sustanciales en los índices esperados de utilidad. Se cita el caso que se preferirá un premio de \$1.000.000.- o la quiebra, en vez de la certeza de no hacer ninguna utilidad, si la probabilidad de quiebra es suficientemente

pequeña, sin embargo, puede ser imposible obtener una evaluación realista de la probabilidad que equivale al concepto "suficientemente pequeña" (9).

8.6 Estudios experimentales para determinar funciones de utilidad

Swalm (100) describe una tentativa seria realizada para determinar funciones de utilidad en 100 ejecutivos, mediante preguntas que llevaban los riesgos a probabilidades del 50%, se buscó evitar las dificultades de distinguir pequeñas diferencias entre rumbos de acción con probabilidades muy parecidas.

Se definió además, el horizonte de planeamiento de cada individuo por cuanto la función de utilidad empresaria de cada uno parecía ser más bien una función de la suma máxima que él recomendaría gastar, antes que de los recursos reales de la empresa.

Se le pedía que sus respuestas representaran la actitud real que adoptaría en su trabajo en ese momento y se presentaban opciones mutuamente excluyentes, una involucraba probabilidades iguales entre dos resultados probables y la segunda un resultado cierto.

Se les daban dos de los tres posibles resultados finales y se les pedía fijaran el tercero de forma tal que les fuera indiferente elegir entre el riesgo y la certeza.

Se llegó a resultados que muestran individuos conservadores (algunos extremadamente), otros cuya función es lineal y otros propensos al riesgo, hasta llegar a ser aventureros. Sin embargo, un grupo grande de ejecutivos mostraban características similares que pueden ser calificadas como de conservadoras o sea de aversión al riesgo. Un descubrimiento que inquietará a muchos empresarios es el que las funciones de utilidad de los individuos parecen estar relacionadas más estrechamente con las sumas que están acostumbrados a manejar (personalmente),

que con la situación financiera de la compañía. Por ello la teoría de la utilidad ofrece la posibilidad de corregir esa distorsión entre las pautas del individuo y las de la empresa.

Se comprobó una marcada tendencia a acentuar la aversión hacia el riesgo en las alternativas de pérdidas, mostrando seres bastante remisos a asumir lo que, para la empresa, parecerían ser riesgos más bien atractivos considerando su capacidad financiera. Se pregunta Swalm si ello no sería producto de los procedimientos de control que predisponen a los gerentes contra la toma de cualquier decisión que pudiera significar una pérdida.

Los procedimientos de control en uso en las empresas premian indebidamente al hombre que recomienda la alternativa de rendimiento bajo, pero seguro, a expensas del individuo que está dispuesto a arriesgarse cuando la ganancia potencial justifica el riesgo. Si las escalas inferiores de ejecutivos rechazan todas las propuestas a excepción de las que ofrecen poco riesgo, los ejecutivos de los más altos niveles nunca llegarán a tener entre manos muchas oportunidades potencialmente deseables.

En general, los resultados mostraron que los puntos del cuadrante positivo parecen más cercanos a una curva suave y continua que los correspondientes al cuadrante negativo.

Según Swalm si bien se dice que: "La teoría de utilidad cardinal no es un pronosticador completamente satisfactorio de la actitud del ejecutivo cuando deben formularse decisiones que implican riesgo, ni es tampoco un método totalmente aceptable en lo que respecta a la descripción de tal comportamiento". El estudio realizado demuestra que la teoría de la utilidad tiene mucho que ofrecer a los empresarios como herramienta de predicción y descripción. El trabajo de investigación ha demostrado según Swalm que: "Los empresarios no tratan de optimizar la ganancia estimada en las situaciones riesgosas que involucran lo que

para ellos son sumas grandes. La teoría de utilidad cardinal ofrece un fundamento razonable para juzgar la consistencia interna de una serie de decisiones tomadas por un ejecutivo que enfrenta riesgos, y que puede ser una ayuda para aumentar esa consistencia. La teoría brinda una manera relativamente simple de clasificar a los diversos tipos de tomadores de decisiones dentro del ámbito de la industria. Pero la mayoría de las veces ella le revelará características no evidentes, debido a que permite la comparación, mostrando una escala de opiniones con respecto al riesgo.

Dyckman (11) y también Hammond (71) concuerdan que la curva de preferencia de cada empresa es generalmente mucho menos adversa al riesgo que las correspondientes a cada uno de sus gerentes y que su utilización por estos últimos, les obligará a abandonar posiciones conservadoras que tienen más en cuenta las consecuencias personales de eventuales pérdidas en algunas decisiones, que las posibilidades que pueden tener para la empresa. Por tanto la curva de preferencia puede ser el mejor medio de comunicar la deseada actitud de la empresa frente al riesgo, aunque de nada servirá si la audiencia no está acostumbrada a pensar explícitamente en el riesgo al tomar decisiones. En opinión de Grayson (13) en firmas que tienen operaciones diversificadas, la función de utilidad puede ser difícil de aplicar, en la medida que en una división se acepten riesgos que no sea aceptarían en otra división.

Otra experiencia es la de Grayson (13) que trabajó con ejecutivos independientes del ramo de exploraciones de la industria petrolera.

En primer término les explicó los conceptos de la toma de decisiones utilizando el valor de utilidad esperada.

Luego, les fueron presentados una serie de hipotéticos negocios de perforación, en los que se les daba el costo de la inversión, la posible utilidad expresada como valor actual y su probabilidad de ocurrencia.

Si se consideraba la propuesta aceptable se debía reducir la probabilidad hasta encontrar un punto de indiferencia. Se les pidió que establecieran respuestas reales por cuanto no existían respuestas correctas, sino preferencias individuales. El resultado mostró diversas curvas de utilidad, en algunas opciones, por ejemplo, \$75.000.- de inversión con una utilidad neta de \$350.000.- la probabilidad de indiferencia fluctuó entre .10 y .70.

La función de utilidad mostró gráficamente las variadas preferencias frente al riesgo asumidas por diferentes individuos en una misma firma, lo que crearía oportunidades para actuar inconsistentemente, si la autoridad de decisión fuera dividida.

La mayor dificultad en la experiencia fué la exigencia de trabajar con probabilidades, por la falta de experiencia en su uso para la toma de decisiones por parte de los participantes.

Grayson dice que en su conjunto las respuestas de los operadores al uso de las funciones de utilidad y al valor de utilidad esperada para tomar decisiones fueron favorables. Expresaron gran interés, pero también tuvieron reservas.

8.7 Determinación de una función de utilidad

Veamos un método para determinar la función de utilidad de un individuo. Supongamos que es poseedor de una lotería que le ofrece una chance 50-50 de recibir \$100.000 o nada. Arbitrariamente asignamos en su escala de utilidad 1 y 0 respectivamente a los dos resultados posibles. Luego le preguntamos si aceptaría \$50.000 en vez de esperar el resultado de la lotería. En caso afirmativo continuaríamos proponiéndole sumas cada vez menores hasta que llegáramos a un importe en que le resultara indiferente tomar el importe en certeza o esperar el resultado del evento.

Supongamos que el valor de indiferencia hubiera resultado \$40.000.-

Tendríamos tres puntos en la escala de utilidad, dos determinados arbitrariamente (1 para \$100.000.- y 0 para \$0) y .5 para \$40.000 y podríamos seguir determinando otros puntos proponiendo otras loterías por montos cuyas utilidades ya nos fueran conocidas.

Así una lotería con .3 probabilidad de ganar \$100.000.- y .7 de ganar \$40.000.-, si el equivalente de certeza es para dicho individuo \$50.000.- tendríamos:

$$\begin{aligned} U(+\$50.000) &= .3 U(+\$100.000) + .7 U(+\$40.000) \\ &= .3 (1) + .7 (.5) = .3 + .35 \\ &= .65 \end{aligned}$$

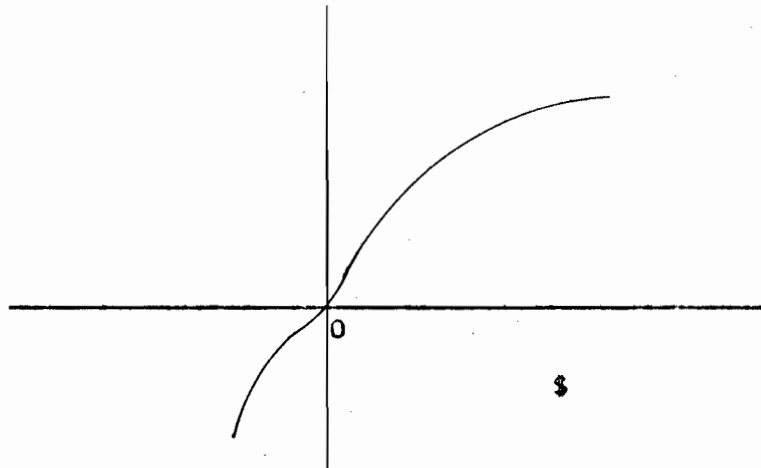
En una forma similar se podrían determinar muchos más importes entre cero y \$100.000 y también en caso necesario montos por encima de \$100.000.- Si el individuo expresa indiferencia entre \$200.000 con probabilidad .3 y \$0 con probabilidad .7, y, \$40.000 con certeza. La ecuación sería:

$$\begin{aligned} .3 (+\$200.000) + .7 U(0) &= U(+\$40.000) \\ .3U(+\$200.000) &= .5 \\ U(+\$200.000) &= \frac{.5}{.3} = 1,67 \end{aligned}$$

También por el mismo camino se determinan las utilidades que corresponden a flujos de fondos negativos. Si el tomador de decisiones es indiferente entre \$50.000.- con certeza o serle posible ganar \$100.000 con .8 de probabilidad o perder \$10.000 con .2 de probabilidad.

$$\begin{aligned} .2 U(-\$10.000) + .8 U(+\$100.000) &= U(+\$50.000) \\ .2 U(-\$10.000) + .8 (1) &= 0,65 \\ .2 U(-\$10.000) &= 0,65 - 0,80 = -0,15 \\ U(-\$10.000) &= \frac{-0,15}{0,2} = -0,75 \end{aligned}$$

y obteniendo otros valores negativos suficientes para determinar la curva de utilidad, podemos representarla gráficamente:



Esta función de utilidad sería la de un individuo que frente a l riesgo se muestra adverso, salvo en caso de estar involucradas sumas muy pequeñas. Esto se ve en el gráfico por ser la curva cóncava (desde abajo) en casi toda su extensión excepto una pequeña sección convexa cerca del origen 0.

Al tener un individuo establecida su curva de utilidad le es posible determinar la utilidad esperada de una distribución dada de ingresos bajo condiciones de riesgo.

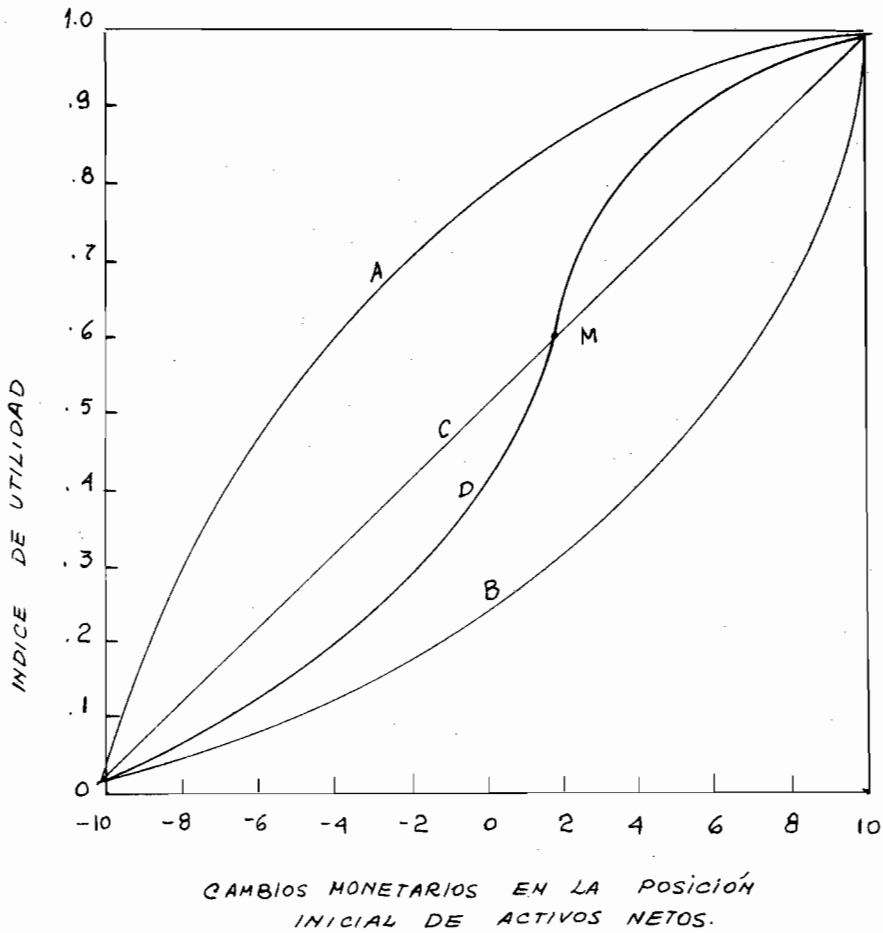
<u>INGRESOS</u>	<u>PROBABILIDAD</u>	<u>UTILIDAD</u>	<u>UTILIDAD PONDERADA</u>
+ \$ 200.000	.1	1,67	.167
+ \$ 100.000	.3	1,—	.300
+ \$ 50.000	.4	0,65	.260
- \$ 10.000	.1	-0,75	-.075
- \$ 15.000	.1	-1,52	-.152
			+.500

La utilidad de +.5 para el individuo de nuestro ejemplo es de +\$40.000 y ese importe es el equivalente de certeza si el individuo es consistente en sus preferencias (35).

Antes de dar por finalizada la determinación de la curva de utilidad de un individuo, Schlaifer (43) propone hacer algunas pruebas

de consistencia, por ejemplo: tomando los valores monetarios que corresponden a las utilidades 0,25 y 0.75 con probabilidades 50% y 50% y verificar si el equivalente de certeza que da el individuo corresponde a la utilidad 0.50.

ANALICEMOS ESTAS CUATRO FUNCIONES DE UTILIDAD.



El tomador de decisiones cuya curva de utilidad está representada por la curva A del gráfico, muestra su aversión al riesgo. Está decidido a pagar \$5.000.- para evitar un juego cuyo valor monetario esperado es \$0.-, con una probabilidad del 50% de perder \$10.000 o le es indiferente salir sin pérdidas o ganancias, de un juego que tiene un valor monetario esperado de \$2.500.- por tener una probabilidad del 50% de perder \$5.000.- e igual probabilidad de ganar \$10.000.-

Por el contrario, el tomador de decisiones representado por la curva B tiene actitudes completamente diferentes y su curva de utilidad es no-línea como la de A.

Para B un juego con probabilidades iguales de ganar o perder una suma importante es preferible a no tener cambios en situación de certeza.

De la lectura de su curva vemos que +\$5.000.- y -\$5.000.- tienen los índices de utilidad .48 y .10 respectivamente, en un juego con probabilidades 50:50, el índice de utilidad resulta $.5(.48) + (.5(.10)) = .29$. El valor monetario esperado de este juego es \$0 y corresponde a un índice de .25, por tanto él preferirá el juego pues la certeza de no cambiar tiene para él un índice de utilidad menor (.25).

Consideremos el tomador de decisiones representado por la curva C.

Al ser su función de utilidad lineal, los ingresos monetarios pueden ser usados como índices de utilidad para decidir si tomamos un juego 50:50 entre +\$5.000.- y -\$5.000.- ó \$0 en certeza.

<u>Ingresos</u>	<u>Índice de utilidad</u>	<u>Probabilidad</u>	<u>Índice de utilidad esperada</u>
- \$ 5.000	.25	.5	.125
\$ 0	.50	.1	-.-
+ \$ 5.000	.75	.5	.375
			<hr/>
			.500
			<hr/>

El índice .5 corresponde a \$0.- que es el valor monetario esperado del juego. La función de utilidad de un individuo puede no coincidir con la curva C ni tampoco estar siempre por arriba o debajo de ella como A y B. Un tomador de decisiones puede tener como representación de su utilidad la curva D; con un punto de inflexión en m. A la izquierda del punto de inflexión el tomador de decisiones sería un tomador de riesgos, por el contrario por montos a la derecha del punto m pasaría a tener aversión al riesgo y no aceptaría pagar, por ejemplo, el valor monetario esperado de \$4.000.- por un juego con probabilidad .75 de ganar \$2.000 y .25 de ganar \$10.000.- (9)

8.8 La Ilusión Cero

Si observamos las curvas de utilidad obtenidas experimentalmente por Swalm y Grayson, vemos un fenómeno repetido frecuentemente; la existencia de un cambio apreciable en la inclinación de la curva cuando se pasa de 0 en la escala horizontal a montos negativos. Este hecho ha sido también puntualizado por Hammond (71) autor que lo ha denominado la ilusión cero.

Su interpretación es que el empresario reacciona muy adversamente cuando sus resultados o flujo de fondos se tornan negativos y mucho más cuando se trata de la posición neta de sus activos totales.

Este fenómeno no es irracional o equivocado y por el contrario tal actitud es perfectamente aceptable. Se ha observado que en muchos casos al hacérsele presente al tomador de decisiones este hecho modifica posteriormente su posición frente al punto 0. Se nota este hecho cuando se verifica que la aversión al riesgo da un súbito salto en juegos que tienen consecuencias positivas y negativas cercanas a 0, con alternativas cercanas a cero cuyas consecuencias son sólo negativas o sólo positivas. Sin embargo según Hammond una vez que ello es puesto

de manifiesto pocas personas continúan adhiriendo a dicha posición.

8.9 Utilización de las curvas de utilidad - Alcances

Estas curvas son un resumen completo de la actitud frente al riesgo del tomador de decisiones en el límite previsto para su actuación. Primeramente se obtiene una curva preliminar y verificada su consistencia, se obtiene la curva de preferencia final. Se dice que las inconsistencias que a menudo resultan al evaluar curvas de preferencia son una razón poderosa en su contra. Hammond (71) afirma que, por el contrario, el hecho que el tomador de riesgos muestre inconsistencias en su actitud frente al riesgo es una de las razones más fuertes para aconsejar su uso. El proceso de superar esas inconsistencias se realiza antes de que puedan afectar desfavorablemente una decisión, al par que se obliga al tomador de decisiones a ser más explícito frente al riesgo.

Hammond desarrolla un método para determinar la curva de preferencia del ejecutivo que explicita su actitud ante el riesgo e incorpora los resultados en árboles de decisión.

Hammond nos da un ejemplo del empleo del árbol de decisión en perforaciones de petróleo, combinado con aplicación de la Teoría de preferencia.

La empresa tiene una posición de activos de \$130.000 y del análisis del árbol de decisión empleando el valor esperado, surge como curso a seguir, no realizar pruebas sísmicas y perforar directamente; sin embargo, existe un 45% de probabilidad de no tener éxito y tener que afrontar el costo de perforación de \$100.000, lo que colocaría a la empresa en la ruina.

La estrategia de realizar pruebas sísmicas y perforar en caso

favorable, tiene un valor esperado algo menor, pero se reduce considerablemente la probabilidad de ir a la ruina a un 9% y seguramente el camino elegido no será el que señala el mayor valor esperado, sino otro más conservador que le es dictado por su intuición en contra del análisis de decisiones por medio del valor monetario esperado, pero con sentido empresario de no comprometer su empresa en una operatoria con amplias posibilidades (45%) de convertirse en ruinososa.

Muchos empresarios tratan de evitar estas situaciones por medio de pronósticos conservadores y toman sus decisiones asumiendo su situación de certeza.

Se llega al extremo de tomar la combinación más desfavorable prevista, lo que hace desechables emprendimientos que hubieran redituado resultados interesantes si se hubiera examinado que la probabilidad de ocurrencia en todas las variables en juego de las situaciones más desfavorables, es extremadamente pequeña.

El aumento de las probabilidades de los eventos menos favorables, la elección de la estrategia con menores pérdidas factibles, el rechazo de proyectos con alta varianza, circunscribiendo la elección por el mayor valor esperado entre aquellos con una varianza aceptable máxima determinada arbitrariamente, son entre muchos otros ejemplos de los caminos seguidos o aconsejados para manejarse frente al riesgo.

La técnica aconsejada por Hammond para considerar la actitud frente al riesgo es hallar para cada punto de decisión en el árbol de decisiones una suma cierta que es el equivalente en certeza conforme al criterio consistente del tomador de decisiones (no su valor monetario esperado).

Un medio de obtener estos equivalentes en certeza es preguntar al ejecutivo en cada punto posible de decisión, lo que puede ser

engorroso en problemas de decisión no muy simples. El otro medio es el uso de curvas de preferencia del tomador de decisiones que, una vez determinadas, pueden ser aplicadas sin la intervención personal en cada caso.

Para obtener el equivalente de certeza de un punto de decisión en un árbol de decisiones usando la teoría de preferencia, Hammond indica el siguiente método:

- 1- Transformar las consecuencias del juego a sus correspondientes preferencias (tomado de las unidades de preferencia que corresponden a los valores monetarios de cada consecuencia).

- 2- Determinar el valor matemático esperado de esas preferencias para cada punto de decisión.

- 3- Volver a la curva de preferencia para encontrar el valor correlativo del valor matemático esperado de las preferencias. Se multiplican las preferencias por las probabilidades, tomando en cada punto de decisión el curso que tenga el valor más alto, hasta llegar en el proceso regresivo de derecha a izquierda, a la base del árbol de decisiones.

La decisión final es, para el ejecutivo de nuestro ejemplo, tomar las pruebas sísmicas y perforar en caso de un resultado favorable (.74 preferencia), en vez de la solución que daba como mayor valor monetario esperado la estrategia de perforar directamente (.68 preferencia). O sea, que considerando la actitud conservadora ante el riesgo, al utilizar su curva de preferencia se opta por una alternativa que en nuestro ejemplo tenía un valor monetario esperado 3% menor que el máximo, pero que reducía del 45% al 9% la probabilidad que la empresa se arruinara. El gasto en las pruebas sísmicas es una forma de póliza de seguros tomada gustosamente por el ejecutivo conservador de nuestro ejemplo, pero que no sería de valor para un tomador de decisiones que decide por "los

promedios."

Hammond cita un viejo dicho que expresa "lo que para un hombre es alimento para otro es veneno", agregando que la teoría de preferencia permite a cada individuo tener el "alimento adecuado". Con ello se remarca el carácter totalmente individual de las curvas de preferencia.

Podemos agregar que los valores de preferencia determinados no son índices de deseabilidad, es decir que .74 no es una estrategia doble de atractiva que otra con un valor de preferencia de .37.

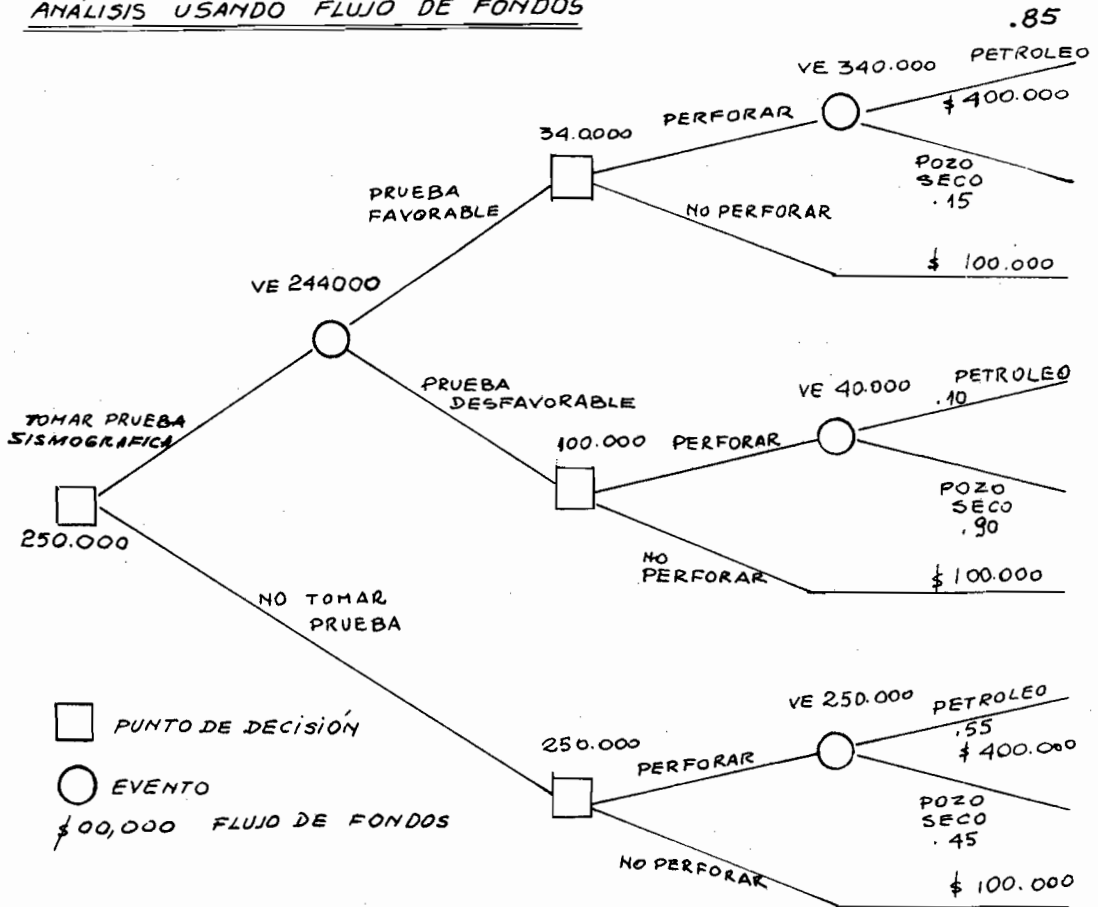
También las preferencias al ser transformadas en equivalentes monetarios de certeza, determinan el valor monetario por el cual al ejecutivo de nuestro ejemplo, le resulta indiferente realizar el emprendimiento o vender la opción del negocio. El valor correspondiente a .74 en la curva de preferencia de nuestro ejemplo es \$160.000.- valor de sus activos totales.

Es necesario incluir en el diagrama todas las decisiones y riesgos que pueden tener un efecto significativo en el criterio del tomador de decisiones en el período de tiempo bajo análisis. Si bien en teoría es necesario un diagrama completo, en muchas situaciones ello es imposible sin hacer el árbol de decisiones excesivamente complicado.

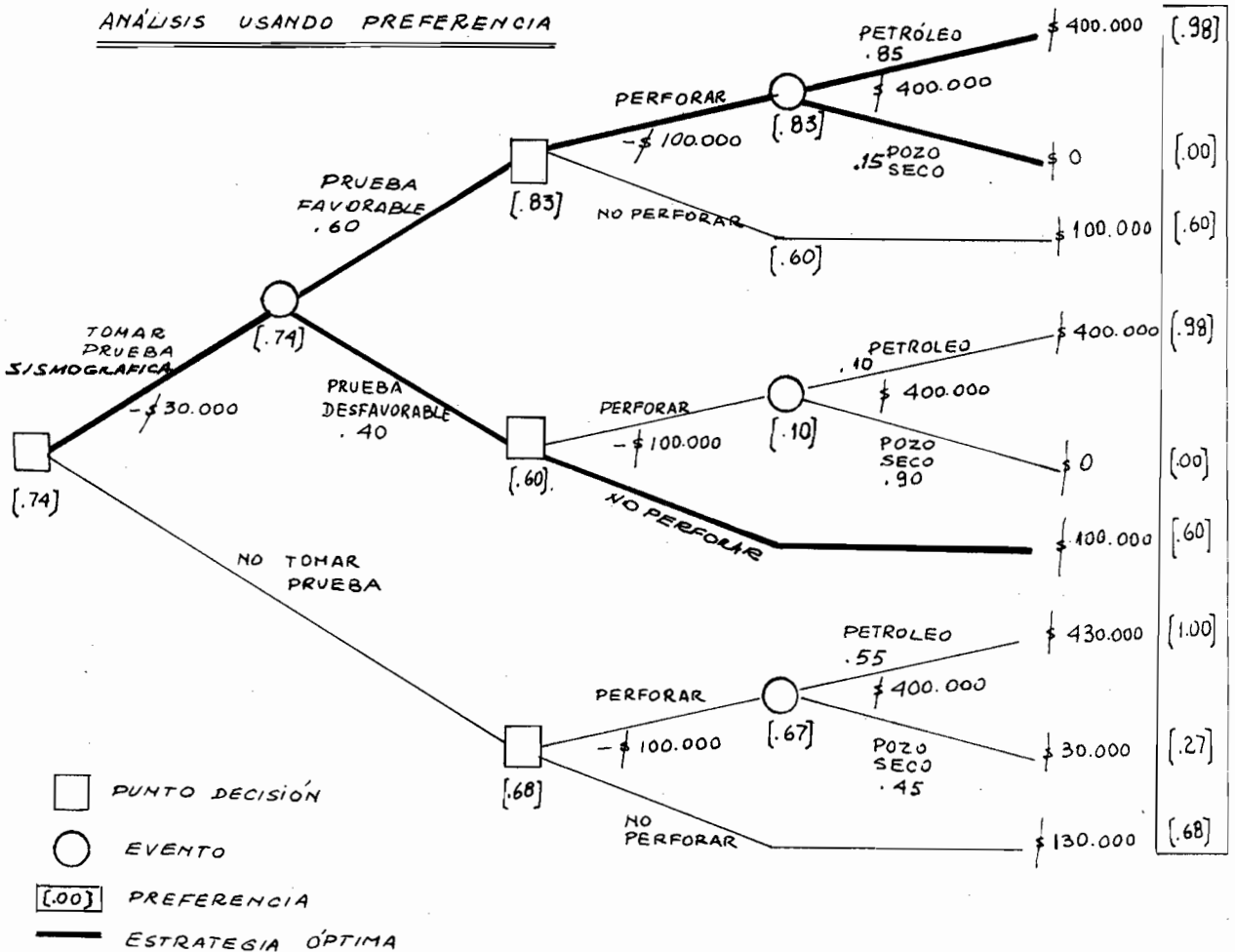
Tal como en el caso de muchos análisis cuantitativos, se requiere verdadero arte y habilidad para detectar detalles suficientes que hagan el análisis útil y poco complicado. La elección de las variables fundamentales y la eliminación de aquellas de baja sensibilidad para el proyecto, parece ser el camino aconsejable.

También debe elegirse con imaginación los topes máximos y mínimos de la curva de preferencia para permitir su uso múltiple coordinando los "horizontes de decisión" del individuo en análisis.

ANÁLISIS USANDO FLUJO DE FONDOS



ANÁLISIS USANDO PREFERENCIA



La mejor ventaja que una función así ofrece es la oportunidad de delegar la autoridad de decisión, al poder manifestar el tomador de decisiones sus preferencias de riesgo en forma explícita a través de su función de utilidad e instruir a sus gerentes para que adecuaran sus decisiones a dicha función individual.

Frente al problema de la función a usar en las grandes empresas con miles de accionistas, si bien no ha sido solucionado hasta ahora, Grayson opina que el principal tomador de decisiones en la empresa, debería utilizar su propia función de utilidad para ayudar a escoger entre las inversiones colocadas fuera del radio de alcance del valor monetario esperado. Esa función de utilidad será una combinación de su conocimiento del mercado, el precio de las acciones, tasa de desarrollo deseada, disponibilidad de efectivo, estado de la deuda, etc. Van Horne y Bierman entre otros, opinan que este es uno de los aspectos más difíciles y que hace poco práctica su utilización.

Según Grayson ninguna curva de utilidad, sin importar su docilidad matemática, debería ser adoptada sin detenerse a pensar en si realmente expresa las preferencias básicas del tomador de decisiones. Además, ante la imposibilidad de hacer comparaciones interpersonales, no existe un empleo práctico del concepto de utilidad.

Otra ventaja de este planteo es que las preferencias de utilidad del tomador de decisiones son incorporadas directamente en el procedimiento de selección de proyectos. Fuera de esto hay poco uso directo de la función de utilidad en inversiones de capital, una dificultad es la de determinar una función de utilidad que pueda ser usada consistentemente.

Si la utilidad para un individuo con respecto a una lotería hipotética es la misma que aquella para una inversión de capital real, es un problema sujeto a serios interrogantes.

Muchos ejecutivos prefieren examinar toda la información y tomar luego su decisión, pudiéndose inferir de ello que no son consistentes en sus decisiones.

Miller y Starr (29) dicen que los intentos para utilizar este procedimiento en la práctica real no siempre han tenido éxito. A menudo existen incongruencias entre las preferencias manifestadas, pero tal como lo señalara Savage, esto no significa más que el individuo en cuestión es realmente inconsistente y que cuando se le hace ver, intenta eliminar la incongruencia (29).

El enfoque de la teoría de la utilidad es esencialmente aplicable al corto plazo. Cuando se pierde el carácter de la resolución de la incertidumbre en forma relativamente inmediata el problema no puede ser resuelto formalmente. En aquellas situaciones en que es necesario tomar en consideración la preferencia de tiempo por medio del descuento, la teoría de la utilidad es inadecuada. O sea, cuando existen ingresos y egresos separados en forma significativa en el tiempo y la fecha de resolución de la incertidumbre es muy importante para el inversor, los ajustes por diferencias de tiempo en los flujos de fondos no pueden ser hechos simplemente por descuento. Para Dyckman (9) aún no hay solución adecuada para este problema; en la misma línea Hammond (71) afirma que los resultados teóricos son aún demasiado complejos para su aplicación práctica. Farrar y Meyer (11) dicen que las decisiones secuenciales bajo riesgo en períodos múltiples están en la frontera del conocimiento de la ciencia de la administración.

Capítulo 8 - REFERENCIAS BIBLIOGRAFICASLibros

- 5- BIERMAN Capital budgeting decision, Cap. 15
- 6- BYRNE Investment under uncertainty, Cap. IV
- 9- DYCKMAN, SMIDT & Management decision making under uncertainty,
Mc ADAMS Cap. 11.
- 11- FARRAR & Managerial Economics, Cap. 5.
MEYER
- 13- GRAYSON Decisions under uncertainty, Cap. 11.
- 17- HIRSHLEIFER Investment, interest and capital, Cap. 8.
- 22- LUCE & Games and decisions, Cap. 2.
RAIFFA
- 23- MAO Quantitative analysis of financial decisions, Cap. 2
- 25- MARKOWITZ Portfolio selection, Cap. 10.
- 29- MILLER & Acuerdos ejecutivos e investigación de operaciones,
STARR Cap. 4.
- 35- PORTERFIELD Investment decisions and capital costs, Cap. 7.
- 39- REUTLINGER Project appraisal under uncertainty, Cap. IV.
- 40- ROBICHEK Investigaciones y decisiones financieras, Cap. 5.
C.J. Grayson.
- 41- ROBICHEK Decisiones óptimas financieras, Cap. 5.
- 43- SCHLAIFER Analysis of decisions under uncertainty, Cap. 5.
- 44- SCHLAIFER Probability and statistics for business decisions,
Cap. 2.
- 50- VAN HORNE Financial management and policy, Cap. 5.
- VON NEUMAN & Theory of games and economic behaviour, Cap. 3.
MORGENSTERN

Articulos

- 69- FRIEDMAN & SAVAGE Utility analysis of choices involving risk.
- 71- HAMMOND Better decisions with preference theory.
- 100- SWALM Teoría de la utilidad.