La teoría del riesgo y su práctica: contribuciones al estudio de la estabilidad y del pleno en el seguro

Kern, Enrique Roberto

1949

CATALOGADO

1101 / 482

Universidad de Buenos Aires
FACULTAD DE CIENCIAS ECONOMICAS

Instituto de Biometría
Director: Prof.Dr.J.Barral Souto

222018

LA TEORIA DEL RIESGO Y SU PRACTICA

Contribuciones al Estudio de la Estabilidad y del Pleno en el Seguro.

por

ENRIQUE ROBERTO LEWS

Trabajo de Investigación de 5° año de la Carrera de Doctores en Ciencias Económicas.

Registro N° 7652.

Buenos Aires
1949

Prólogo

En las clases de Matemática Actuarial, dictadas en el año 1945, en la Facultad de Ciencias Económicas, por el Prof. Dr. Argentino V. Acerboni, se ha despertado por primera vez mi inquietud por investigar en el interesante y amplio campo que brinda la Teoría del Riesgo. Desde entonces me he dedicado a profundizar mis conocimientos en la materia, encontrándome con un gran número de autores y teorías, que por diversos caminos tratan de llegar a soluciones satisfactorias. He podido comprobar así, que ante la gran diversidad de opiniones, muy pocos actuarios han utilizado hasta el presente, en la práctica, algún resultado obtenido por la teoría. Abundan los métodos empíricos que, al satisfacer suficientemente las necesidades del comercio de seguros, no urgen innovaciones en la materia.

Más tarde he tenido oportunidad de aplicar la teoría del riesgo individual y he podido apreciar los resultados que da la teoría en la práctica. No habiéndome satisfecho del todo, continué con mis investigaciones, y es así como al leer el artículo "Problems in Probability Theory" del Prof. Harald Cramer, en el Annals of Mathematical Statistics (Junio de 1947, págs. 165/193), he recibido, por primera vez, noticias acerca de una teoría del riesgo distinta a la individual; comencé entonces a estudiar los trabajos de F. Lundberg y de otros autores escandinavos, que exponen la llamada Teoría del Riesgo Colectivo, muy poco difundida en los países extra-escandinavos, y que recién ha despertado en los últimos años el interés de algunos autores europeos.

Basándome en el material mencionado y en muchas concepciones propias que poco a poco he percibido, a medida que avanzaba en el estudio, he preparado la presente investigación. En ella analizo los principales resultados obtenidos por la teoría del riesgo individual, con la finalidad de dar una visión de conjunto, para proponar finalmente la aplicación de la Teoría del Riesgo Colectivo, basada en la probabilidad de la ruina; es propósito de esta investigación exponer su deducción teórica en forma accesible y proponer fórmulas y tablas que, con suficiente aproximación, resuelven muchos de los problemas que se presentan en la práctica, en lo que a estabilidad, fondo de seguridad, pleno y recargo de seguridad se refieren.

Buenos Aires, 17 de julio de 1949.

Capítulo I

T E O R I A   Y   P R A C T I C A

1. La Teoría Matemática y el Mundo Experimental

Los fenómenos naturales pueden describirse mediante el lenguaje de manera tal, que despierten en el lector una imagen similar a la que ha percibido el redactor. Existe por lo tanto una cierta relación entre la terminología psicológica y la de las ciencias naturales.

La matemática es una forma del lenguaje (1). Mediante el análisis de los fenómenos exteriores, nuestro espíritu elabora un conjunto de principios o axiomas básicos de la teoría. Luego, mediante un procedimiento deductivo, se obtienen una serie de conclusiones que deben corresponderse con cierta aproximación con los hechos experimentados. En general, la teoría tiene sólo contactos con el mundo exterior al principio y al final de cada sucesión de razonamientos; pero su contenido propiamente dicho está dado por los razonamientos puramente matemáticos que se sitúan entre el principio y el final de cada sucesión.

A la teoría de las probabilidades le corresponde el análisis de los fenómenos cuantitativos de un colectivo. Sigue el mismo razonamiento arriba indicado; mediante la experiencia y la utilización de conceptos matemáticos abstractos, crea los axiomas que la fundamentan. De ellos se deducen con todo rigor y unívocamente las propiedades a aplicar en la práctica.

La aplicación de la teoría de las probabilidades a los fenómenos influenciados por circunstancias económicas y procesos biológicos es aún muy discutida debido a que la teoría no responde adecuadamente a los resultados de la práctica. Pero las fallas no deben a-

---

(1) ten PAS, H.G.J., C.I.A. 1940, Tomo I, pág. 264, "Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in der Versicherungsmathematik"; "Die Sprache muss, sofern sie eine wissenschaftliche sein soll, so beschaffen sein, dass sie beim Hörer oder Leser die gleichen Vorstellungen erweckt, wie sie im Geiste des Sprechers, bzw. des Schreibers lebten. Dieses Problem ist ein psychologisches. Es besteht somit ein funktionelles Verhältnis zwischen der Terminologie der Psychologie und derjenigen der beschreibenden Naturwissenschaften. Die Mathematik, und damit auch die Wahrscheinlichkeitsrechnung, erscheinen in diesem Gedankengang als eine Form der Sprache."

tribuirse tanto a la inaplicabilidad de la teoría, como a una correspondencia inadecuada entre las premisas y las acuaciones del fenómeno experimentado.

Por otra parte, no debe buscarse un imposible; la coincidencia perfecta entre la teoría y la práctica. Los conceptos matemáticos son abstractos, son el producto de nuestro espíritu, que pueden tener su símil pero no su igual en el mundo experimental. Lo esencial es conocer en todos los casos el grado de aproximación que existe entre la teoría que se ha elaborado y el mundo exterior ([2]).

Es evidente que a medida que se aclaran las relaciones causales, se amplía nuestro conocimiento y, en la misma medida, pueden deducirse con más seguridad conclusiones para el futuro. Es por ello que la experiencia debe compararse constantemente con los resultados de la teoría y, si no hay una aproximación satisfactoria, hay que buscar las causas de esa discrepancia ([3]). Aún en física, las leyes que hasta hace poco se

---

([2]) Cabe destacar que en las mismas teorías físicas es muy difícil si no imposible construir una representación mecánica de un fenómeno físico "in casu et secundum rem"; lo que se hace es describir los hechos observados sin dar necesariamente una explicación conforme a la naturaleza de las cosas. Al respecto cita E.T. WHITTAKER (El Principio y el Fin del Mundo, Buenos Aires, Emecé Editores, págs. 49/50) las dos descripciones que hacía HIPARCO de la órbita aparente del sol; una como una circunferencia excéntrica y otra como una curva epicicloide, mientras que la verdadera es una elipse. Cualquiera de las dos alternativas satisfacía el grado de exactitud posible en esa época, y las dos eran igualmente satisfactorias en cuanto cualquiera de las dos permitía predecir la posición del sol en una fecha futura dada.

([3]) Tomemos otro caso de la física; a principios de este siglo todas las entidades físicas conocidas entonces se representaban como vibraciones, tensiones o estructuras en el éter; la luz, la electricidad, el magnetismo, etc. Todos los fenómenos de la materia inanimada podían ser interpretados y predichos por medio de ecuaciones matemáticas, cuya exactitud se comprobaba por la observación de los fenómenos. Quiere decir que estos fenómenos ocurren como si el éter existiera, sin que esto sea prueba de que el éter exista, en realidad. En efecto, después del descubrimiento de la mecánica cuántica se demostró que la teoría etérea es innecesaria. Luego, en los últimos años, se afirma que los componentes del universo son entes que tienen propieconsiderabamos invariables, han sido substituídas por otras. El investigador, en un constante afán de superación y perfeccionamiento, procede al refinamiento de la teoría y a la corrección de los métodos. Otro tanto puede decirse de los fenómenos influenciados por circunstancias económicas y procesos biológicos; la correspondencia insuficiente entre las premisas y las causales no debe ser motivo para rechazar toda teoría, sino por el contrario, debe ser motivo para perfeccionar los métodos y utilizar premisas más adecuadas, que permitan describir los fenómenos y hacer predicciones con más exactitud.

2. Aplicación de la Teoría de las Probabilidades al Seguro.

Abarcando las operaciones inherentes al seguro fenómenos comprendidos dentro de los indicados anteriormente como influenciados por circunstancias económicas y procesos biológicos, podría repetirse para aquéllas lo dicho con respecto a la aplicación de la teoría de las probabilidades.

El hecho de que las fluctuaciones de mortalidad, especialmente su disminución secular, hacen inexactas las bases téc-

---

dades duales; son a la vez partícula y onda. E.T. WHITTAKER (op.cit.págs.62/63) dice: "La física matemática moderna afirma que, en último análisis, el mundo exterior está constituído por entidades, los corpúsculos sin existencia permanente, ni forma, ni lugar en el espacio, y que no pueden ser representados por la intuición, ni descritos sino por medio de una fórmula matemática. Con la ayuda de estas fórmulas, el resultado de cualquier experimento puede ser predicho, y esta predicción es la única función y capacidad de la ciencia. El mecanismo ha sido reemplazado por la concepción pan-matemática del universo. La segunda mitad del siglo XIX vió el auge del materialismo científico y la doctrina de que la materia bruta situada en el espacio era la única realidad y de que el pensamiento era un mero epifenómeno de ciertos estados y movimientos de la materia. La posición materialista, sin embargo, se derrumbó cuando la materia misma se vino abajo, en una teoría matemática de corpúsculos, porque la matemática es incuestionablemente una función del pensamiento."

sicas utilizadas, no es motivo suficiente para negar la aplicación de la teoría de las probabilidades a las operaciones de seguro, porque en las consideraciones técnicas se podría tener en cuenta ese factor o, de lo contrario, aislar las causas estructurales de las casuales mediante el estudio de la tendencia correspondiente.

Tampoco es motivo suficiente el hecho de que en muchas investigaciones el coeficiente de dispersión de LEXIS indique una dispersión subnormal o hipernormal de la mortalidad, porque no debe considerarse sólo como cálculo de probabilidades a la teoría que surge del esquema de BERNOULLI; también deben considerarse como partes integrantes del cálculo de probabilidades a las teorías derivadas de otros esquemas.

Se considera que el argumento de que las tasas de mortalidad no son probabilidades "a priori" y de que no son independientes entre sí, está contestado con lo dicho anteriormente y que se repite; Los conceptos matemáticos son abstractos, son el producto de nuestro espíritu, que pueden tener su símil pero no su igual en el mundo experimental. Lo esencial es conocer en todos los casos el grado de aproximación que existe entre la teoría que se ha elaborado y el mundo exterior.

A.EINSTEIN ha dicho en 1921 lo siguiente: "Cuando las leyes matemáticas se refieren a la experiencia, no son necesariamente ciertas; cuando son necesariamente ciertas ya no se refieren a la experiencia". (4)

---

(4) "Soweit die Gesetze der Mathematik sich auf die Wirklichkeit beziehen, sind sie nicht sicher, und soweit sie sicher sind, beziehen sie sich nicht auf die Wirklichkeit". A.EINSTEIN, Geometrie und Erfahrung, 1921, pág. 3. Citado por W. WINKLER, B.V.S.V., 1944, pág. 151.

Capítulo II

L A T E O R I A D E L R I E S G O I N D I V I D U A L

1. Antecedentes Históricos.

J.N.TETENS ([5]) ha sido, al parecer, el primer matemático que introdujo el concepto de riesgo en el seguro de vida. Calculó la ganancia y pérdida media que puede esperarse en una renta vitalicia.

P.S.LAPLACE ([6]) calculó luego en 1812 el riesgo medio de las rentas vitalicias, según la ley normal de los errores, y C.BREMIKER ([7]), en 1859, el riesgo medio de las rentas vitalicias sin emplear dicha ley ([8]). H.LAURENT ([9]) introdujo luego, en 1873, el llamado "coeficiente de seguridad" y T.WITTSTEIN ([10]) estudió entre 1867 y 1885 una serie de conceptos nuevos, como ser la reserva de riesgo, el riesgo matemático como prima de reaseguro, etc.

G.BOHLMANN, con su artículo en la Enciclopedia de Ciencias Matemáticas ([11]) y su Informe al Congreso de Actuarios de Viena del año 1909 ([12]), sentó las bases de la teoría del riesgo individual y sus conocidas hipótesis de cálculo ([13]) para fundamentar un sistema completo.

([5]) J.N.TETENS, Einleitung zur Berechnung der Leibrenten, Leipzig 1786.

([6]) P.S.LAPLACE, Oevres 7, pág. 440. Citado en E.S.M., Tome I, Volumen 4, Fascículo 2, pág. 577.

([7]) C.BREMIKER, Das Risiko bei Lebensversicherungen, Berlin 1859.

([8]) G.BOHLMANN, Technique de L'assurance sur la vie, exposé par H. Poterin du Motel, E.S.M., Tome I, Volumen 4, Fascículo 2, págs. 491/590 (especialmente nota 180, pág. 581).

([9]) H.LAURENT, J.A.F., Paris 1873, págs. 79 y 162.

([10]) T.WITTSTEIN, Mathematische Statistik, Hannover 1867, y Das mathematische Risiko der Versicherungs-Gesellschaften, Hannover 1885.

([11]) G.BOHLMANN, Lebensversicherungsmathematik, Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Tomo 1, Parte II, Leipzig 1900-1904, y edición francesa ya citada.

([12]) G.BOHLMANN, C.I.A., 1909, Tomo I, págs. 593/683.

([13]) G.BOHLMANN, E.S.M., op. cit., págs. 497/502.

Casi contemporáneamente han contribuído E.CZUBER [14] y U. BROGGI [15] a exponer la teoría del riesgo individual en sus respectivos libros de texto.

G.BOHLMANN no ha ignorado las discusiones que en esos entonces existían y que aún hoy subsisten acerca de la aplicación de la teoría de las probabilidades al seguro. En 1909 [16] expresa que el buen resultado obtenido en el cálculo de las primas y reservas demuestra la utilidad de la fundamentación esquemática. En cuanto a la teoría del riesgo, acepta que no se ha logrado aún una comprobación práctica y, previendo las objeciones, divide las causas de las fluctuaciones de la mortalidad en dos: una componente física y otra casual.

Además, tampoco acepta G.BOHLMANN incondicionalmente la utilización de la curva normal de los errores para medir la probabilidad de los desvíos de mortalidad; al respecto recomienda estudiar el error cometido, aplicando el teorema de LIAPOUNOFF [17].

2. Los Principales Resultados de la Teoría del Riesgo Individual.

Dos personas A y B inician un juego con las siguientes reglas: antes de iniciar cada jugada, B le paga a A una puesta P; si pierde A, éste le paga a B un importe c - su puesta es

---

[14] E. CZUBER, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig 1903.

[15] U.BROGGI, Matematica Attuariale, Milan 1906.

[16] G.BOHLMANN, C.I.A., op.cit., págs.662/665.

[17] "Par conséquent, dans les assurances sur la vie où le nombre μ des opérations est grand, la loi de GAUSS a lieu approximativement, et cette approximation est d'autant plus grande que le nombre μ est plus grand. Mais dans la pratique des assurances sur la vie, il importerait de connaître ce degré d'approximation. Il est fourni par l'erreur ε_μ commise en appliquant le théorème de Liapunov, qui suppose $\mu = +\infty$, au cas envisagé où μ est fini". E.S.M., op.cit., pág. 561.

por lo tanto $c - P$ - y si gana, no paga nada; A tiene la probabilidad p de ganar y q de perder, siendo $p+q=1$. Se tiene entonces que, por definición (18), la esperanza matemática de una ganancia, positiva o negativa, para un juego equitativo, está dada por:

$$pP + q(P-c) = 0 \qquad \therefore \qquad P = cq.$$

Ligado con el juego planteado anteriormente, se define al riesgo matemático por la relación:

$$D = \frac{1}{2}\left\{ p|P| + q\,|P-C| \right\} = cpq.$$

y al riesgo medio al cuadrado por la relación:

$$M^2 = pP^2 + q(P-c)^2 = c^2pq.$$

Para el caso de una sola modalidad de juego, existe por lo tanto una relación sencilla entre el riesgo matemático y el riesgo medio:

$$M = cD$$

No ocurre lo mismo cuando las distintas modalidades son numerosas. En general se tiene:

$$[1] \qquad D = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n} |c_i - P_i|\, p_i$$

$$[2] \qquad M^2 = \sum_{1}^{n} (c_i - P_i)^2\, p_i$$

El riesgo medio M, se utiliza en la teoría del riesgo debido a que su cuadrado, M^2, goza de la propiedad aditiva:

$$M^2_{a+b} = \sum^a \sum^b \left[(c_a - P_a) + (c_b - P_b)\right]^2 p_a\, p_b = M_a^2 + M_b^2$$

En general, para determinar el riesgo medio de una cartera, en función de los riesgos medios individuales, se tiene:

$$M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2}$$

El riesgo matemático D, en cambio, no goza de esta propiedad.

Si se supone que los desvíos de mortalidad tienen una dispersión normal, existe entre el riesgo matemático y el riesgo medio la relación:

$$M = \sqrt{2\pi}\cdot D$$

debido a que:

$$M^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2npq}}\, dx = npq.$$

(18) J.V.USPENSKY. Introduction to Mathematical Probability. New

$$D = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \int_{-\infty}^{+\infty} |x| \, e^{-\frac{x^2}{2npq}} dx = \sqrt{\frac{npq}{2\pi}}$$

Esto significa que para pasar del riesgo medio al riesgo matemático, debe ser normal la distribución de los desvíos de mortalidad, como ya señaló G.BOHLMANN en la Enciclopedia de Ciencias Matemáticas (19).

Más terminante, escribe luego G.BOHLMANN en su informe al Congreso Internacional de Actuarios de 1909 (20), que el riesgo matemático sólo se utiliza y es aplicable a operaciones individuales, en tanto que el riesgo medio se usa preferentemente para el conjunto de una cartera.

3. La Teoría del Riesgo Individual en la Práctica.

Simbolizamos con V_{m+1} a la reserva de una operación de seguros en el momento $m+1$, con v al factor de descuento y con p_m a la probabilidad de que una persona que vive en el momento m sobreviva en el momento $m+1$; $q_m = 1 - p_m$.

De acuerdo con la definición de riesgo matemático y riesgo medio, se tiene entonces, para una operación individual, en el período comprendido entre m y $m+1$:

$$D(m, m+1) = p_m q_m v (1 - V_{m+1})$$

$$M^2(m, m+1) = p_m q_m (v - v V_{m+1})^2 = p_m q_m v^2 (1 - V_{m+1})^2.$$

---

(19) "Si donc la loi de GAUSS s'appliquait rigoureusement on pourrait déterminer le risque mathématique d'un ensemble d'opérations ~~élémentaires~~ au moyen des risques mathématiques des opérations élémentaires, en passant par les risques moyens de ces opérations élémentaires". E.S.M.,op.cit., pág. 579.

(20) "Während somit die Theorie des mittleren Risikos hauptsächlich auf Fragen angewandt worden ist, die einen ganzen Versicherungsbestand betreffen und erst für solchen einen Sinn bekommen, sind die selbständigen Anwendungen der Theorie des durchschnittlichen Risikos, wie es auch hier gar nicht andere möglich ist, immer bei der Betrachtung einer einzelnen Versicherung stehen geblieben". C.I.A., op.cit., pág. 596.

Cuando una operación se extiende sobre un período más largo y se desea calcular el cuadrado del riesgo medio de la misma, por toda esa duración, puede determinarse en función de los medidas de riesgo de cada sub-período, de acuerdo con la siguiente relación;

$$M^2(m,n) = M^2(m,m+1) + \frac{D'_{m+1}}{D'_m} M^2(m+1,m+2) + \dots + \frac{D'_{m+n-1}}{D'_m} M^2(m+n-1,m+n).$$

siendo $D'_x = l_x v^{2x}$.

Se obtiene el riesgo medio de toda la cartera en función del cuadrado del riesgo medio de cada una de las operaciones individuales, según se ha establecido anteriormente, por la fórmula:

$$[3] \qquad M = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + \dots + M_n^2}$$

Suponiendo la dispersión normal, puede calcularse, en función de la integral de LAPLACE-GAUSS, la probabilidad de que no se produzcan desvíos mayores de λ veces el riesgo medio de la cartera:

$$P_{x \leq \lambda M} = \Phi\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}}} e^{-t^2} dt$$

en que x representa a los desvíos y llamándose a λ coeficiente de seguridad.

Siguiendo con la introducción de conceptos nuevos, se simboliza con G a la ganancia que arroja una cartera en un período dado y con R a la reserva de riesgo, que se determina por la relación:

$$R = \lambda M - G.$$

Esta relación responde a la exigencia de que el asegurador debe hacer frente, de acuerdo con una probabilidad determinada en función de λ, con fondos propios y la ganancia total de la cartera, a los desvíos posibles de siniestros.

Se designa con g a la ganancia por capital unitario y con η al pleno, al cual corresponde un riesgo medio unitario M_η.

Utilizando todos esos conceptos, H.LAURENT [21] y C.LANDRE [22] han dado las bases para el cálculo del pleno en la teoría del riesgo individual.

Para H.LAURENT, el pleno es aquel capital que, incorporado a la cartera, no aumenta la reserva de riesgo:

$$\lambda\sqrt{M^2+\eta^2 M_\eta^2} - g\eta - G \leqq \lambda M - G$$

$$[4] \quad \therefore \quad \eta \leqq \frac{2\lambda M g}{\lambda^2 M_\eta^2 - g^2}$$

Si en vez de una sola operación con capital η, se efectúan n operaciones con el mismo capital, se tiene:

$$\lambda\sqrt{M^2+n\eta^2 M_\eta^2} - ng\eta - G = \lambda M - G$$

$$[5] \quad \therefore \quad \eta = \frac{2\lambda M g}{\lambda^2 M_\eta^2 - n g^2}$$

Para C.LANDRE, el pleno es aquel capital que, incorporado a la cartera, no varía la relación que existe entre el riesgo de la cartera y los capitales:

$$\frac{M}{\Sigma_i C_i} = \frac{\sqrt{M^2+\eta^2 M_\eta^2}}{\Sigma_i C_i + \eta}$$

C_i : capital de cada operación.

$$[6] \quad \therefore \quad \eta = \frac{2M^2 \Sigma_i C_i}{(\Sigma_i C_i)^2 M_\eta^2 - M^2}$$ [23].

---

[21] H.LAURENT, J.A.F., Tomo 2, París 1873.

[22] C.LANDRE, Mathematisch - Technische Kapitel zur Lebensversicherung, Jena 1901.

[23] La ecuación de C.LANDRE se presta a transformaciones elegantes. B.HEIDWELL (Zur Theorie des Maximums, C.I.A. 1912, Tome I, págs. 85/95 y Zur Theorie und Praxis des Maximums in der Lebensversicherung, C.I.A. 1927, Vol.I, págs. 469/476) llegó en 1912 al siguiente resultado:

$$\eta \sim \frac{2(\sqrt{A}-\sqrt{a})}{1/\sqrt{a} - 1/\sqrt{A}}$$

en que a y A representan respectivamente las sumas menor y mayor aseguradas; luego, en 1927, aplicando la distribución de V.PARETO, indicó esta otra solución:

$$\eta \sim \frac{2}{3} c(1+n^{1/5}+n^{-1/5})$$

en que n representa el número de operaciones.

Si en vez de utilizar la distribución de V.PARETO se aplica la distribución logarítmica, teniendo en cuenta que:

$$u = a\log_{10} v + b \qquad v = e^{\frac{u-b}{a \log_{10} e}} \qquad m_k(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{k\frac{u-b}{a\log_{10} e}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

se tiene: $\eta \sim 2\dfrac{\Sigma C_i^2}{\Sigma_i C_i} = 2\dfrac{m_2(v)}{m_1(v)} = 2\, e^{\frac{3}{2a^2\log e} - \frac{b}{a\log e}}$

Considerando que la curva logarítmica se ajusta por lo general muy bien a la distribución de capitales, la fórmula obtenida

Si en vez de una sola operación con capital η, se efectúen n operaciones del mismo capital, se tiene:

$$[7] \qquad \eta = \frac{2M^2 \Sigma_i C_i}{(\Sigma_i C_i)^2 M_\eta^2 - n M^2}$$

G.BOHLMANN [24], al explicar el razonamiento de C.LANDRÉ, define al pleno como aquel capital que, incorporado a la cartera, no varía la relación que existe entre la ganancia y el riesgo medio de la cartera:

$$\frac{G+g\eta}{\sqrt{M^2+\eta^2 M_\eta^2}} = \frac{G}{M}$$

$$[8] \qquad \therefore \quad \eta = \frac{2M^2 G g}{M_\eta^2 G^2 - M^2 g^2}$$

que para el caso de n operaciones nuevas de un capital η se transforma en:

$$[9] \qquad \eta = \frac{2M^2 G g}{M_\eta^2 G^2 - n M^2 g^2}$$

Puede definirse también al pleno como aquel capital que, incorporado a la cartera, mantiene en cero al fondo de seguridad:

$$\lambda \sqrt{M^2 + \eta^2 M_\eta^2} - g \Sigma_i C_i - g\eta = 0$$

de donde:

$$[10] \qquad \eta = \frac{g^2 \Sigma_i C_i \pm \sqrt{g^4 (\Sigma_i C_i)^2 - (M_\eta^2 \lambda - g^2)\left[\lambda^2 M^2 - g^2 (\Sigma_i C_i)^2\right]}}{\lambda^2 M_\eta^2 - g^2}$$

Si se hace: $g = \frac{\lambda M}{\Sigma_i C_i}$

se obtienen de [10] las fórmulas de H.LAURENT y C.LANDRÉ.

4. Cálculo del Pleno en una Cartera de Seguros aplicando la Teoría del Riesgo Individual.

Como ejemplo de aplicación a la práctica, de las fórmulas de H.LAURENT y C.LANDRÉ, se ha tomado una cartera de seguros y seguido el ~~procedimiento~~ detallado a continuación:

1°) Se han agrupado las pólizas de un asegurado, para tomarlas como una sola unidad de riesgo.

2°) Se ha determinado el capital a riesgo de cada unidad

---

(24) G.BOHLMANN, C.I.A., op.cit., pág. 634.

de riesgo, restando del capital asegurado la reserva matemática y descontando por un año el valor así obtenido.

3°) Se ha calculado el riesgo medio para cada unidad de riesgo, elevando al cuadrado el capital a riesgo de cada unidad y multiplicando el resultado por las probabilidades anuales de muerte y sobrevivencia.

4°) Se ha calculado el riesgo medio anual de la cartera, extrayendo la raíz cuadrada a la suma de todos los riesgos medios al cuadrado de cada unidad de riesgo.

5°) Se ha utilizado primeramente la fórmula [5] de H.LAURENT, suponiendo que se contratan en el año 100 operaciones nuevas de un capital η. Los valores que se han utilizado son los siguientes:

$$\lambda = 3$$
$$M = 93.348$$
$$q = 0.002$$
$$pq = 0.005173$$

obteniéndose el importe de $ 24.269.- como valor del pleno.

6°) Luego, en vez de la fórmula anterior, se ha utilizado la [7] de G.LANDRÉ. Siendo $\Sigma^i C_i$ = 60.000.000, se ha obtenido para el pleno el importe de $ 60.177.-

7°) Finalmente se ha utilizado la variante [9] de la fórmula de G.LANDRÉ, obteniéndose como resultado $ 56.152.-

5. Crítica a la Teoría del Riesgo Individual.

Muchas han sido y siguen siendo las críticas que se hacen a la teoría del riesgo individual. Haciendo abstracción de las críticas que niegan toda utilidad a la teoría del riesgo y de las críticas de carácter práctico, porque la determinación del cuadrado del capital a riesgo se facilita hoy grandemente con los modernos sistemas de cálculo, se considera que uno de los principales puntos débiles de la teoría del riesgo individual está en que tiene que basarse en la distribución normal de los errores, para poder establecer la probabilidad de un desvío en función del riesgo medio. Si la práctica no confirmase la distribución normal de los errores, se inutilizarían con ello todas las fórmulas de la teoría del riesgo individual.

Para analizar los resultados de la práctica, numerosos autores ya han estudiado experiencias de mortalidad:

J.H.PEEK ([25]), aplicando el coeficiente de LEXIS al período 1880-1889, llegó a la conclusión que había una dispersión hipernormal de la edad 0 hasta los 7 años; luego de la edad 9 en adelante, hasta los 90 años, acusó una dispersión normal, con la excepción de la edad 70.

G.BOHLMANN ([26]), al revisar la dispersión en dos compañías de seguros para los años 1869-1880 y 1880-1894, obtuvo coeficientes muy cercanos a la unidad en todas las edades observadas (20 años en adelante).

E.AMMETER ([27]), después de haber eliminado la disminución secular de la mortalidad en el período de observación, que abarcó los años 1869 a 1938 de asegurados suizos, llegó a la conclusión que la dispersión no es normal en cada una de las distintas edades, pero tiende a acercarse a la normal cuando se toman grandes grupos de edades. En definitiva propone este autor el esquema del contagio.

E.HAFERL ([28]) comparó la mortalidad efectiva registrada en los años 1943 y 1944 en la compañía suiza "Vita", con la esperada de acuerdo con la distribución de POISSON:

([25]) J.H.PEEK, Das Problem von Risiko in der Lebensversicherung, 1899. Citado en M.V.S.V., 1944, pág. 171.

([26]) G.BOHLMANN, citado idem.

([27]) H.AMMETER, Untersuchungen über die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen in einem Versicherungsbestand, M.V.S.V., 1945, págs. 323/359.

([28]) E.HAFERL, Betrachtungen über die Schwankungen der Sterblichkeit in der Lebensversicherung, M.V.S.V., 1945, págs. 361/373.

N° de muertes en cada grupo	N° de grupos efectivamente registrados		N° de grupos esperados seg. distribuc. de POISSON	
	1943	1944	1943	1944
0	1	0	1,1	0,2
1	6	2	5,0	1,5
2	9	6	11,3	4,5
3	26	6	16,9	8,9
4	20	13	19,0	13,4
5	15	17	17,1	16,1
6	12	21	12,8	16,1
7	7	7	8,2	13,8
8	5	12	4,6	10,3
9	2	18	2,3	6,9
10	2	4	1,0	4,1
11	1	1	0,4	2,3
12	0	3	0,2	1,1
13	0	0	0,1	0,5
14	0	0	0,0	0,2
15	0	0	0,0	0,1
16	0	0	0,0	0,0

H. WIESLER (29) realizó una serie de investigaciones con los siguientes resultados;

<u>Coeficientes de Dispersión para el Período 1869-1910, de la Mortalidad de la Población Suiza (Varones).</u>

Edad	Coeficiente de dispersión	Edad	Coeficiente de dispersión	Edad	Coeficiente de dispersión
0	6,33	8	2,52	40	1,54
1	5,19	9	2,20	45	1,46
2	4,50	10	1,30	50	1,36
3	4,73	15	1,15	55	1,42
4	3,74	20	1,16	60	1,15
5	2,96	25	1,64	65	1,20
6	3,17	30	1,61	70	1,67
7	2,53	35	1,78	75	1,72
				80	1,40

Es decir que la dispersión resultó ser, en este caso, constantemente hipernormal. Otras investigaciones del mismo autor llegaron a determinar un coeficiente de dispersión de hasta

---

(29) H. WIESLER, Uber die Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik, M.V.S.V., 1944, págs. 151/209.

15,82 para las edades 20 - 29 en la experiencia de mortalidad de la "Basler Lebens-Versicherungs-Gesellschaft" en el período 1912 - 1936.

Las distintas estadísticas demuestran, como se ha visto a través de algunas, una discrepancia total, con lo cual la aplicación de las fórmulas de la teoría del riesgo individual se hace insegura, porque se basan en probabilidades de desvíos que no han recibido una confirmación general en la práctica. Por otra parte, se carece de un estudio que establezca si los valores obtenidos son significativos o no.

Debido a estos inconvenientes, hay autores que prescinden del cálculo de probabilidades, proponiendo una especie de cuenta de ganancias y pérdidas ([30]) ([31]). Otros han ensayado distribuciones como las de POISSON, POLYA-EGGENBERGER, etc., pero en esos casos ya no se pueden utilizar las fórmulas corrientes de la teoría del riesgo individual ([32]). S.VAJDA ([33]) ha introducido, con su "tabla de mortalidad ampliada", el concepto de que las probabilidades de muerte no son fijas para cada edad, sino que se distribuyen de acuerdo con una función de frecuencia. Pueden deducirse así fórmulas generales que no tienen necesidad de estar en relación con ninguna distribución de errores en particular. Con ello se daría a la teoría del riesgo una base empírica; la probabilidad de los desvíos tendría que ser fijada entonces, en cada caso, según observaciones previas ([34]).

([30]) [illegible], La détermination des excédents à réassurer dans l'assurance sur la vie, M.V.S.V., 1946, págs. 245/271.

([31]) E.HAFERL, Die Bestimmung der Selbstbehalte in der Lebensversicherung, C.I.A., 1940, Tomo I, págs. 349/376.

([32]) H.AMMETER, op.cit., M.V.S.V., 1945, pág. 345 y sig.

([33]) S.VAJDA, Die erweiterte Sterbetafel und ihre wahrscheinlichkeitstheoretische Verwendung, C.I.A., 1940, Tomo I, págs. 241/251.

([34]) H.JECKLIN, Die Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen, M.V.S.V., [illegible]

Consideramos que una teoría del riesgo que permita obtener resultados positivos en la práctica, debe basarse en estadísticas de valores que influyen y reflejan el riesgo. Hay que conocer la frecuencia relativa de los siniestros, la distribución de los capitales a riesgo, sin estar sujeto a fórmulas, aunque sean generales, para cada tipo de seguro. En tal sentido se orienta la teoría del riesgo colectivo, basada en la probabilidad de la ruina.

En cuanto al pleno - importe máximo que toma el asegurador por su cuenta - opinamos que su determinación debe estar condicionada a que, con un fondo de seguridad y carga de seguridad dados, la probabilidad de un desvío en el importe de los siniestros, no sobrepase cierto límite, previamente fijado. El pleno debe poder fijarse unívocamente; a tal efecto se tiene que aplicar el criterio arriba indicado y utilizar las relaciones lógicas que debe establecer la teoría del riesgo entre los distintos factores que son objeto de su estudio.

Capítulo III

LA RUINA DEL JUGADOR

1. La Ruina del Jugador y la Paradoja de San Petersburgo.

Conocido es el problema de San Petersburgo. Se tira una moneda; si sale cara, pierde A y el juego ha terminado; si sale seca, gana A la puesta 1 y sigue el juego.

Hasta aquí la esperanza matemática es igual a ½. La probabilidad de que salga seca en la primera jugada y seca en la segunda, es ¼. Como la puesta en esta partida se fija en 2, la esperanza matemática es otra vez ½. En la tercera jugada la esperanza matemática también es ½, porque la puesta es 1.2.2 = 4 y así sucesivamente.

Cada uno de los términos de la serie es igual a ½ y la esperanza matemática del otro jugador, B, es infinita. Este es el resultado que ya obtuvo D.BERNOULLI (35).

Desde el punto de vista de la ruina del jugador, el problema se resuelve así; A tiene la unidad como fortuna, al comenzar el juego, porque si pierde, éste se acaba; quiere decir que A se ha arruinado. B en cambio tiene una fortuna infinita, porque continúa jugando hasta que A pierda una jugada.

Utilizando la fórmula [14], la probabilidad de la ruina de A está dada por:

$$\psi(u) = 1 - \frac{u}{a+b}$$

en que $a=1$ y b es infinito; como u es una cantidad mensurable, queda:

$$\psi(u) = 1.$$

quiere decir que existe la certeza de que A se arruinará. Aún si A tuviera una suerte extraordinaria y no perdiera nunca en n jugadas $(n \to \infty)$, u siempre será de un orden menor que b, porque B puede continuar jugando, por hipótesis; luego subsiste el resultado ya obtenido:

$$\psi(u) = 1.$$

---

(35) J.BERTRAND, Calcul des Probabilités, Paris 1907. Págs.IX/L.

2. La Probabilidad de la Ruina con Apuestas Fijas.

Dos jugadores A y B, tienen las respectivas fortunas a y b, apostando α y β con las probabilidades p y q.

Simbolizando con $\psi(u)$ a la probabilidad de la ruina de A en el momento de tener un fondo u, se tiene:

[11] $$\psi(u) = p\,\psi(u+\beta) + q\,\psi(u-\alpha).$$

Es decir que si A gana el próximo juego, su fortuna aumenta a $u+\beta$ y la probabilidad de ser arruinado después será $\psi(u+\beta)$; si, en cambio, pierde la jugada, su fortuna disminuye a $u-\alpha$ y la probabilidad de ser arruinado después, será $\psi(u-\alpha)$. Las condiciones adicionales del problema son de que A está arruinado si su fortuna se hace menor que α; en cambio su ruina es imposible si su fortuna es mayor que $a+b-\beta$, porque entonces está arruinado B.

$$\psi(\alpha-s) = 1 \qquad s = 1, 2, \ldots, \alpha.$$
$$\psi(a+b-\beta+s) = 0 \qquad s = 1, 2, \ldots, \beta.$$

La fórmula [11] es una ecuación que tiene soluciones particulares de la forma ε^u, por ejemplo:

[12] $$\psi(u) = c_1 + c_2\,\varepsilon^u$$

en que ε es una raíz de la ecuación

[13] $$1 - p\,\varepsilon^\beta = q\,\varepsilon^{-\alpha}.$$

$\varepsilon = 1$ es una solución evidente de esta ecuación. Para averiguar otras soluciones, hacemos:

$$f(\varepsilon) = 1 - p\,\varepsilon^\beta \qquad F(\varepsilon) = q\,\varepsilon^{-\alpha}.$$

$F(\varepsilon)$ es una función hiperbólica; $f(\varepsilon)$ corta el eje positivo de las ordenadas en 1 y el eje positivo de las abcisas en $p^{-\frac{1}{\beta}}$. Analizando ahora ambas funciones en el primer cuadrante, se observa que:

1°) $$F'(\varepsilon) = -q\alpha\,\varepsilon^{-(\alpha+1)} < 0$$

y por lo tanto $F(\varepsilon)$ es una función monótona decreciente para $\varepsilon > 0$.

2°) $F''(\varepsilon) = q\alpha(\alpha+1)\varepsilon^{-(\alpha+2)} > 0$

y por lo tanto $F(\varepsilon)$ da su convexidad hacia el eje de las abscisas, para $\varepsilon > 0$.

3°) $f'(\varepsilon) = -p\beta\varepsilon^{\beta-1} < 0$

o sea que $f(\varepsilon)$ es monótona decreciente para $0 < \varepsilon < p^{-\frac{1}{\beta}}$.

4°) $f''(\varepsilon) = -p\beta(\beta-1)\varepsilon^{\beta-2}$

o sea que $f(\varepsilon)$ da su concavidad hacia el eje de las abscisas para $0 < \varepsilon < p^{-\frac{1}{\beta}}$.

De este análisis se deduce que en el intervalo $0 < \varepsilon < p^{-\frac{1}{\beta}}$ hay a lo sumo dos puntos de intersección, y nada más que dos, entre las curvas representativas de las funciones $f(\varepsilon)$ y $F(\varepsilon)$.

Siendo $\varepsilon = 1$ la solución evidente, corresponde determinar si es que hay una y sólo una solución más para $\varepsilon > 0$. Como tanto $F(\varepsilon)$ como $f(\varepsilon)$ son funciones monótonas decrecientes en el intervalo $0 < \varepsilon < p^{-\frac{1}{\beta}}$, si $f'(1) = F'(1)$, hay una solución solamente, para la ecuación [13] , en cuyo caso $p\beta = q\alpha$, o sea que el juego es equitativo; si $f'(1) \neq F'(1)$, se tiene que $p\beta \neq q\alpha$, o sea que el juego es inequitativo, y hay otra solución más para [13] y nada más que una, debido a que existe ya un punto de intersección, que se trata de dos funciones monótonas decrecientes, y que $F(\varepsilon)$ da su convexidad mientras que $f(\varepsilon)$ da su concavidad al eje de las abcisas.

Cuando el juego es equitativo, quiere decir si $p\beta = q\alpha$, hay otra solución particular en u de [11], de manera que se puede suponer:

$$\psi(u) = C_1 + C_2 u$$

De las condiciones $\psi(0) = 1$ y $\psi(a+b) = 0$, se obtienen los valores de las constantes:

$$C_1 = 1 \qquad C_2 = -\frac{1}{a+b}$$

y por consiguiente:

$$[14] \qquad \psi(u) = 1 - \frac{u}{a+b}$$

Cuando el juego es inequitativo, es decir si $p\beta \neq q\alpha$, hay dos alternativas:

1°) A tiene una ventaja sobre B:

$$p\beta > q\alpha .$$

2°) B tiene una ventaja sobre A:

$$p\beta < q\alpha .$$

En estos casos, además de la solución $\varepsilon = 1$, existe una y sólo una solución más para $\varepsilon > 0$. En la primera alternativa, $0 < \varepsilon < 1$, y en la segunda alternativa $\varepsilon > 1$.

Analizaremos ahora el caso en que B tiene una fortuna infinita. Según [11] tenemos que:

$$\psi(u) = c_1 + c_2 \varepsilon^u .$$

De las condiciones $\psi(0) = 1$ y $\psi(a+b) = 0$ se deducen los valores de las constantes:

$$c_1 = -\frac{\varepsilon^{a+b}}{1-\varepsilon^{a+b}} \qquad c_2 = \frac{1}{1-\varepsilon^{a+b}}$$

$$[15] \qquad \therefore \qquad \psi(u) = \frac{\varepsilon^u - \varepsilon^{a+b}}{1-\varepsilon^{a+b}} .$$

Si en la relación [15] $b \to \infty$ y B juega con ventaja, por lo que se ha visto arriba, $\varepsilon > 1$, y por lo tanto:

$$\psi(u) = 1$$

quiere decir que la ruina de A es cierta.

Si $b \to \infty$ y es A quien juega con ventaja, resulta $0 < \varepsilon < 1$, y por consiguiente:

$$[16] \qquad \psi(u) = \varepsilon^u \qquad 0 < \varepsilon < 1 .$$

Capítulo IV

LA TEORIA DEL RIESGO COLECTIVO

1. Antecedentes.

F.LUNDBERG es el creador de la Teoría del Riesgo Colectivo; en 1909 presentó al Congreso de Actuarios de Viena su estudio sobre la Teoría del Reaseguro ([36]), al mismo tiempo que G.BOHLMANN entregó su ya citado artículo sobre la Teoría del Riesgo Medio; luego, en 1926, publicó otro estudio sobre el particular ([37]).

En 1930 aparecieron tres artículos sobre la Teoría del Riesgo Colectivo; uno del mismo F.LUNDBERG ([38]), el segundo de I.LAURIN ([39]) y el tercero de H.CRAMER ([40]). En 1932, se publicó otro estudio de F.LUNDBERG ([41]) y uno de F.ESSCHER ([42]).

En 1939 C.O.SEGERDAHL fundamentó la teoría con todo rigor matemático ([43]). Entre los artículos aparecidos en los últimos años cabe nombrar los de S.TÄCKLIND ([44]), C.O.SEGERDAHL ([45]) y K.HULTMAN ([46]).

([36]) F.LUNDBERG, Über die Theorie der Rückversicherung, C.I.A. 1909, Tomo I, págs. 877/955.

([37]) F.LUNDBERG, Försäkringsteknisk riskutjämning, Stockholm 1926.

([38]) F.LUNDBERG, Über die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse, S.A. 1930, págs. 1/83.

([39]) I.LAURIN, An Introduction into Lundberg's theory of risk, S.A. 1930, págs. 84/111.

([40]) H.CRAMER, On the mathematical theory of risk, Skandia-Festskrift, Stockholm 1930.

([41]) F.LUNDBERG, Some supplementary researches on the collective risk theory, S.A. 1932, págs. 137/158.

([42]) F.ESSCHER, On the probability function in the collective theory of risk, S.A. 1932, págs. 175/195.

([43]) C.O.SEGERDAHL, On homogeneous random processes and collective risk theory, Uppsala 1939.

([44]) S.TÄCKLIND, Sur le risque de ruine dans des jeux inéquitables, S.A. 1942, págs. 1/42.

([45]) C.O.SEGERDAHL, Über einige risikotheoretische Fragestellungen, S.A. 1942, págs. 43/83; id., Some Properties of the Ruin Function in the Collective Theory of Risk, S.A. 1948, págs. 46/87.

También hubo autores extrasudamericanos que en los últimos años se interesaron por el problema, como H. AMMETER (47). Otros, aunque variando el punto de vista, o criticando los resultados obtenidos, también demostraron interesarse, como B. DE FINETTI (48) y G. OTTAVIANI (49).

2. Planteamiento del Problema y determinación de la Ecuación Básica.

Calcular la probabilidad de la ruina de un asegurador, equivale a determinar la probabilidad de que el monto de los siniestros, a partir de un cierto momento, no sobrepase un cierto límite, previamente fijado.

El razonamiento a seguir descansa en los mismos principios que los utilizados en el Capítulo III, con la diferencia de que ahora las puestas son variables.

Se asimilan las operaciones de seguro a un conjunto de juegos sucesivos e independientes, que representamos distribuídos en forma contínua sobre un eje t que define el tiempo. Se supone un flujo contínuo de primas de riesgo y una distribución discontínua de los siniestros, en forma de puntos, sobre el mismo eje t.

Si se considera ahora un punto determinado, representativo de un siniestro, tiene la misma probabilidad de caer en un intervalo que en otro, o sea que el siniestro puede ocurrir en un lapso dado o en otro; quiere decir que el punto está situado al azar. Como hipótesis adicional, establecemos que la cantidad de siniestros que ocurre en un intervalo dado, es independiente de los siniestros que se han registrado fuera de ese intervalo.

---

(47) H. AMMETER, Das Maximum des Selbstbehaltes in der Lebensversicherung unter Berücksichtigung der Rückversicherungskosten, M.V.S.M. 1946, págs. 187/213.

(48) B. DE FINETTI, La Teoria del Rischio e il Problema della Rovina dei Giocatori, G.I.I.A., año X, N° 2, 1939.

De acuerdo con estas consideraciones, puede decirse que los puntos representativos de los siniestros se distribuyen sobre el eje del tiempo "individual y colectivamente al azar" [10]. Se puede demostrar entonces que la probabilidad de que ocurra un siniestro en un intervalo dt, es un infinitésimo del mismo orden que dt, mientras que la probabilidad de que ocurra más de un siniestro en el mismo intervalo, es un infinitésimo de un orden superior al de dt.

En efecto, dividiendo al intervalo de 0 a t en una cantidad de elementos dt, se puede demostrar que t no contiene punto alguno siempre que ello también se verifique en cada uno de los subintervalos. Si designamos con $P(0,t)$ a la probabilidad de que no haya puntos en el intervalo de 0 a t; con $P(0, dt)$ a la probabilidad de que no haya puntos en dt y con $P(>0, dt)$ a la probabilidad de que haya uno o más puntos en dt, se verifica:

$$P(0, dt) = 1 - P(>0, dt)$$

y como hay $\frac{t}{dt}$ elementos en t:

$$P(0,t) = [P(0,dt)]^{t/dt} = [1 - P(>0,dt)]^{t/dt}$$

Aplicando logaritmos en ambos miembros:

[17] $$\log P(0,t) = \frac{t}{dt} \log [1 - P(>0,dt)] = -t \left[\frac{P(>0,dt)}{dt} + \frac{[P(>0,dt)]^2}{2\,dt} + \cdots \right]$$

Se presentan ahora tres alternativas:

---

[10] Cabe destacar la analogía que existe entre los conceptos que aplican los autores que han escrito sobre la teoría del riesgo colectivo y las conclusiones a que conducen estas hipótesis que utilizamos, basadas en el libro "Probability and its Engineering Uses" de T.C.FRY, que me ha señalado el Prof. Dr. J.Barral Souto. El mencionado autor, sin referirse a la teoría del riesgo colectivo, estudia un esquema apropiado para dicha teoría: la distribución "individual y colectiva al azar", que define de la siguiente manera: (op.cit.pág.218): "A set of points is said to be distributed "individually at random" along a line segment provided each point of the set is placed at random, independently of all the rest". "A set of points is said to be distributed "collectively at random" along a line segment provided the probability of any interval dx containing n points is independent of the number of points in any intervall not

1°) $\frac{P(>0,dt)}{dt}$ tiende a cero cuando dt tiende a cero.

2°) $\frac{P(>0,dt)}{dt}$ tiende a infinito cuando dt tiende a cero.

3°) $\frac{P(>0,dt)}{dt}$ tiende a un límite ρ cuando dt tiende a cero.

De estas tres posibilidades, la única que arroje en [17] un resultado consistente con el problema, es la tercera, que adoptamos.

Se deduce pues que la probabilidad de que haya uno o más puntos en dt es un infinitésimo del mismo orden que dt. Hay que demostrar todavía que solamente $P(1,dt)$ es un infinitésimo del mismo orden que dt. Llamamos con $P(>1,dt)$ a la probabilidad de que el intervalo dt contenga más de un punto y con $P_{>0}(>1,dt)$ a la probabilidad condicional de que, habiendo uno o más puntos en un intervalo, haya más de un punto. Se tiene entonces:

$$P(>1,dt) = P(>0,dt)\cdot P_{>0}(>1,dt).$$

Elegimos ahora un intervalo de magnitud dt que contenga uno de los puntos; la probabilidad de que contenga otro punto es justamente $P_{>0}(>1,dt)$. Si pasamos al límite, cuando dt tiende a cero, se obtiene evidentemente la probabilidad de que haya un segundo punto que coincida con el primero, la cual es igual a cero si todos los puntos están distribuídos individualmente al azar. De donde $P_{>0}(>1,dt)$ tiende a cero cuando dt tiende a cero.

Como

$$P(1,dt) = P(>0,dt) - P(>1,dt) = P(>0,dt)\left[1 - P_{>0}(>1,dt)\right]$$

se deduce que en el límite

[18] $$P(1,dt) = P(>0,dt) = \rho\cdot dt.$$

Con lo cual se demuestra que, en el límite, la probabilidad de que haya un punto en el intervalo dt es igual a la probabilidad de que haya uno o más puntos en el intervalo dt, y que es un infinitésimo del mismo orden que dt (51).

(51) Hasta aquí la demostración se ha basado principalmente en el citado libro de T.C.FRY.

Designamos ahora con $p(z)dz$ a la probabilidad de que, habiendo ocurrido un siniestro, el capital a riesgo correspondiente está comprendido entre z y $z+dz$. Entonces, de acuerdo con [18]:

$$P(>0,dt)\,p(z)dz = P(1,dt)\,p(z)dz$$

es la probabilidad de que el asegurador tenga que pagar un capital comprendido entre z y $z+dz$ en el intervalo dt.

Establecemos además la condición:

$$\int_0^\infty z\,p(z)dz = \int_0^\infty p(z)dz = 1 .$$

Como la esperanza matemática del capital a pagar en un siniestro en el intervalo dt, tiene que ser igual a la prima de riesgo, que llamamos dP, se tiene:

$$P(1,dt)\int_0^\infty z\,p(z)dz = dP$$

y por lo tanto:

[19] $$P(>0,dt) = P(1,dt) = dP.$$

Como por [18] hemos visto que:

$$P(1,dt) = \rho\,dt$$

se deduce que:

$$\rho\,dt = dP$$

de donde surge que dP es un infinitésimo del mismo orden que dt.

Denominamos fondo de seguridad al importe que destina el asegurador para hacer frente a los siniestros. Al iniciarse las operaciones, está formado únicamente por u, o sea el fondo inicial. Luego, en el primer intervalo de magnitud dt, se le suma a u el premio de riesgo dP, más el recargo de seguridad λdP. Si no hay siniestros, el fondo queda entonces en:

$$u + (1+\lambda)\,dP$$

mientras que si hay siniestros, el fondo es disminuído en z:

$$u + (1+\lambda)\,dP - z$$

Este capital z puede ser menor o mayor que el fondo de seguridad disponible; en el último caso se arruina el asegurador.

Tenemos que considerar por lo tanto tres eventualidades excluyentes para el intervalo dt ;

1°) que no ocurran siniestros;

2°) que ocurra un siniestro y que el importe del mismo sea superior al fondo de seguridad disponible;

3°) que ocurra un siniestro y que el importe del mismo sea menor que el fondo de seguridad disponible.

A estas eventualidades corresponden respectivamente las probabilidades;

1°) $$1-P(>0,dt)$$

2°) $$P(>0,dt)\int_{u+(1+\lambda)dP}^{\infty} p(z)\,dz$$

3°) $$P(>0,dt)\int_{0}^{u+(1+\lambda)dP} p(z)\,dz.$$

Si deseamos determinar ahora la probabilidad $\Psi(u)$ de que el asegurador se arruine haciendo infinitas operaciones sucesivas e independientes, con un fondo de seguridad inicial u , tenemos que considerar las tres probabilidades independientes siguientes;

1°) La probabilidad de que no ocurra siniestro alguno en el primer intervalo de magnitud dt y que posteriormente se arruine el asegurador;

$$[1-P(>0,dt)]\cdot\Psi[u+(1+\lambda)dP].$$

2°) La probabilidad de que ocurra un siniestro y de que el capital del mismo sea tan grande que agote al fondo de seguridad;

$$P(>0,dt)\int_{u+(1+\lambda)dP}^{\infty} p(z)\,dz.$$

3°) La probabilidad de que ocurra un siniestro, pero que el capital del mismo no alcance a agotar el fondo de seguridad, y que recién posteriormente se arruine el asegurador, cuando el fondo de seguridad ha adquirido el valor $u+(1+\lambda)dP-z$:

$$P(>0,dt)\int_0^{u+(1+\lambda)dP}\psi[u+(1+\lambda)dP-z]\cdot p(z)\,dz.$$

Reuniendo estas tres probabilidades, se tiene:

$$\psi(u)=[1-P(>0,dt)]\cdot\psi[u+(1+\lambda)dP]+P(>0,dt)\int_{u+(1+\lambda)dP}^{\infty}p(z)\,dz+$$

$$+P(>0,dt)\int_0^{u+(1+\lambda)dP}\psi[u+(1+\lambda)dP-z]\cdot p(z)\,dz$$

Pasemos ahora el primer término del segundo miembro al primero y efectuemos el producto indicado:

$$P(>0,dt)\cdot\psi[u+(1+\lambda)dP]+\psi(u)-\psi[u+(1+\lambda)dP]=$$

$$=P(>0,dt)\int_{u+(1+\lambda)dP}^{\infty}p(z)\,dz+P(>0,dt)\int_0^{u+(1+\lambda)dP}\psi[u+(1+\lambda)dP-z]\cdot p(z)\,dz$$

Por el teorema del valor medio tenemos luego que:

$$\psi[u+(1+\lambda)dP]=\psi(u)+(1+\lambda)\,dP\,\psi'(\xi)\qquad u<\xi<u+(1+\lambda)dP$$

y por lo tanto:

$$P(>0,dt)\cdot\psi[u+(1+\lambda)dP]-(1+\lambda)\,dP\cdot\psi'(\xi)=$$

$$=P(>0,dt)\cdot\int_{u+(1+\lambda)dP}^{\infty}p(z)\,dz+P(>0,dt)\int_0^{u+(1+\lambda)dP}\psi[u+(1+\lambda)dP-z]\cdot p(z)\,dz$$

Dividimos ahora ambos miembros por $P(>0,dt)$:

$$\psi[u+(1+\lambda)dP]-(1+\lambda)\,\psi'(\xi)\,\frac{dP}{P(>0,dt)}=\int_{u+(1+\lambda)dP}^{\infty}p(z)\,dz+\int_0^{u+(1+\lambda)dP}\psi[u+(1+\lambda)dP-z]\cdot p(z)\,dz$$

Utilizando la relación [19] y haciendo tender dt a cero:

[20] $$\psi(u)-(1+\lambda)\,\psi'(u)=\int_u^{\infty}p(z)\,dz+\int_0^u\psi(u-z)\,p(z)\,dz$$

Esta es la ecuación básica a que hemos querido llegar. Se trata de una ecuación integro-diferencial, que puede resolverse de diversas maneras.

3. Solución de la Ecuación Básica para el caso especial en que $p(z)=e^{-z}$.

Si $p(z)=e^{-z}$, la ecuación [20] se transforma en:

$$\psi(u)-(1+\lambda)\,\psi'(u)=\int_u^{\infty}e^{-z}\,dz+\int_0^u\psi(u-z)\,e^{-z}\,dz$$

o también:

$$\psi(u)\cdot e^{u}-(1+\lambda)\,\psi'(u)\cdot e^{u}=-1+\int_0^u\psi(z)\cdot e^{z}\,dz$$

y derivando con respecto a u:

$$\psi''(u) + \frac{\lambda}{1+\lambda}\,\psi'(u) = 0$$

Se trata de una ecuación diferencial lineal de 2° orden con coeficientes constantes. Existe por lo tanto una solución general (12) de la forma:

$$\psi(u) = c_1 e^{k_1 u} + c_2 e^{k_2 u}$$

siendo en este caso particular:

$$k_1 = 0 \qquad k_2 = -\frac{\lambda}{1+\lambda}$$

Las constantes c_1 y c_2 se determinan por la condición:

$$\psi(+\infty) = 0$$

y la fórmula [21] : $\psi(0) = \dfrac{1}{1+\lambda}$

Por lo tanto se tiene finalmente:

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\lambda}\, e^{-\frac{u}{1+\lambda}}$$

4. Reducción de la Ecuación Básica a una Integral de Segunda Especie.

Haciendo en [20]:

$$K(t) = e^{-\frac{t}{1+\lambda}}\, p(t) \qquad g(t) = e^{-\frac{t}{1+\lambda}}(1+\lambda)\,[1-\psi(t)]$$

se obtiene:

$$g'(u) = -\frac{1}{1+\lambda}\int_0^u K(t)\cdot g(u-t)\,dt$$

Integrando entre 0 y x con respecto a u ;

$$\int_0^x dg(u) = -\frac{1}{1+\lambda}\int_0^x du \int_0^u K(t)\cdot g(u-t)\,dt$$

$$\therefore\ g(x) - g(0) = -\frac{1}{1+\lambda}\int_0^x g(t)\,dt \int_t^x K(u-t)\,du$$

haciendo: $H(x,t) = \displaystyle\int_t^x K(u-t)\,du$

y sabiendo por [21] que:

$$g(0) = (1+\lambda)\left(1 - \frac{1}{1+\lambda}\right) = \lambda$$

se obtiene finalmente:

$$g(x) = \lambda - \frac{1}{1+\lambda}\int_0^x g(t)\,H(x,t)\,dt$$

---

(12) L.BIEBERBACH, Theorie der Differentialgleichungen, New York 1944, pág. 153

Se trata de una ecuación integral de segunda especie, que puede resolverse por aproximaciones sucesivas (series de NEUMANN) [53].

5. Determinación de la Probabilidad de la Ruina cuando el Fondo Inicial de Seguridad es Nulo.

Según la ecuación básica [20] se tiene:

$$(1+\lambda)\,\psi'(u) - \psi(u) + \int_u^\infty p(z)\,dz + \int_0^u \psi(z)\,p(u-z)\,dz = 0$$

Integrando entre cero e infinito con respecto a u:

$$(1+\lambda)\int_0^\infty d\,\psi(u) - \int_0^\infty \psi(u)\,du + \int_0^\infty du \int_u^\infty p(z)\,dz + \int_0^\infty du \int_0^u \psi(z)\,p(u-z)\,dz = 0$$

Cambiando los límites de integración, haciendo en el último término $u-z=t$, y teniendo en cuenta que:

$$\psi(+\infty) = 0 \qquad \int_0^\infty z\,p(z)\,dz = 1$$

se obtiene:

$$-(1+\lambda)\,\psi(0) - \int_0^\infty \psi(u)\,du + 1 + \int_0^\infty \psi(u)\,du \int_0^\infty p(t)\,dt = 0$$

$$\therefore \quad -(1+\lambda)\,\psi(0) + 1 + \int_0^\infty \psi(u)\,du \left\{ \int_0^\infty p(t)\,dt - 1 \right\} = 0$$

pero $\int_0^\infty p(t)\,dt = 1$

$$\therefore \quad -(1+\lambda)\,\psi(0) + 1 = 0$$

y finalmente:

$$[21] \qquad \psi(0) = \frac{1}{1+\lambda}$$

6. Una Solución Particular de la Ecuación Básica.

En la práctica se comprueba que, por lo general, el fondo de seguridad es superior al mayor capital asegurado directamente (neto de reaseguros). Por consiguiente, en [20] es:

$$\int_u^\infty p(z)\,dz = 0 \qquad u > \eta$$

de manera que:

$$[22] \qquad \psi(u) - (1+\lambda)\,\psi'(u) = \int_0^\eta \psi(u-z)\,p(z)\,dz$$

---

[53] E. MADELUNG, Die Mathematischen Hilfsmittel des Physikers, New York 1943, págs. 209/213.

en que η representa, como antes, el pleno.

Se seguirá ahora un camino similar al ensayado en el Capítulo III para resolver la ecuación [11]. Se trata del caso particular en que el fondo del jugador A, en este caso el asegurador, es u, y el fondo del jugador B, en este caso los asegurados, es infinito. La solución [16] que se ha obtenido entonces, ha sido:

$$\psi(u) = \varepsilon^{u} \qquad\qquad 0 < \varepsilon < 1.$$

ε es una cantidad positiva, menor que uno, pudiendo escribirse:

$$\varepsilon^{u} = e^{ku} \qquad\qquad k < 0$$

Se ensayará ahora en [22] la solución particular $\psi(u) = e^{ku}$ y se demostrará luego que k efectivamente cumple la condición $k < 0$.

Se obtiene, reemplazando $\psi(u)$ por e^{ku} en [22]:

[23] $$1-(1+\lambda)\, k = \int_0^{\infty} e^{-kz} p(z)\, dz$$

estando definido k por esta relación.

Para determinar cuántas raíces admite [23], hacemos:

$$f(k) = 1-(1+\lambda)\, k \qquad\qquad F(k) = \int_0^{\infty} e^{-kz} p(z)\, dz$$

Por de pronto es evidente la solución $k=0$;

$$f(0) = F(0).$$

Determinamos ahora las siguientes derivadas de $f(k)$ y $F(k)$ con respecto a k:

$$f'(k) = -(1+\lambda) \qquad\qquad f'(0) = -(1+\lambda)$$

$$F'(k) = -\int_0^{\infty} z e^{-kz} p(z)\, dz \qquad\qquad F'(0) = -1.$$

$$F''(k) = \int_0^{\infty} z^2 e^{-kz} p(z)\, dz$$

De acuerdo con estos resultados podemos afirmar que $f(k)$ es una función lineal decreciente de k; $F(k)$ es una función monótona decreciente de k, que tiene su convexidad hacia el eje de las abcisas. Para que $k=0$ sea por lo tanto la única solución de [23], deben ser iguales las primeras derivadas de ambas funciones en ese punto;

$$-(1+\lambda) = -1 .$$

Luego tiene que ser $\lambda=0$ y el juego es equitativo. Este resultado concuerda con el obtenido en el Capítulo III.

Si $\lambda>0$, hay una solución más para [23] y nada más que una. Como $f'(0)<F'(0)$, esa solución debe existir para $k<0$, pudiendo escribirse entonces;

$$k=-R \qquad R>0$$

y por consiguiente;

$$[24] \qquad \psi(u) = e^{-Ru}$$

La determinación de R por la relación

$$[25] \qquad 1+(1+\lambda)R = \int_0^\infty e^{Rz}p(z)\,dz$$

es un problema que puede resolverse mediante interpolación. Como R está dada en forma implícita, conviene calcular primeramente λ en función de R ;

$$\lambda = \frac{\int_0^\eta e^{Rz}p(z)\,dz - 1}{R} - 1$$

y luego determinar R en función de λ .

7. Acotación de la Probabilidad de la Ruina en el caso de la Solución Particular.

La relación [25] puede escribirse:

$$1+(1+\lambda)R = \int_0^\eta p(z)\,dz + R\int_0^\eta z\,p(z)\,dz + \frac{R^2}{2}\int_0^\eta z^2 e^{R\xi}p(z)\,dz \qquad 0<\xi<z$$

y como $\int_0^\eta p(z)\,dz = \int_0^\eta z\,p(z)\,dz = 1$

resulta

$$1+(1+\lambda)R = 1+R+\frac{R^2}{2}\int_0^\eta z^2 e^{R\xi}p(z)\,dz$$

$$\therefore [26] \qquad \lambda = \frac{R}{2}\int_0^\eta z^2 e^{R\xi}p(z)\,dz$$

Aplicando el teorema del valor medio, obtenemos;

$$\lambda = \frac{R}{2} e^{R\theta} m_2 \qquad 0 < \theta < \eta$$

en que $\quad m_2 = \int_0^\eta z^2 p(z)\, dz$

$$\therefore \quad R e^{R\theta} = \frac{2\lambda}{m_2}$$

y como $\quad e^{R\theta} > 1$

obtenemos:

$$R < \frac{2\lambda}{m_2}.$$

Aplicamos ahora nuevamente el teorema del valor medio en [26] :

$$\lambda = \frac{R}{2} e^{R\theta}\theta \qquad 0 < \theta < \eta$$

$$\therefore [27] \quad R e^{R\theta} = \frac{2\lambda}{\theta}$$

y como $\quad e^{R\theta} > 1 \qquad R < \frac{2\lambda}{\theta}$

obtenemos reemplazando en [27]:

$$R e^{2\lambda} > \frac{2\lambda}{\theta} \qquad \therefore \quad R > \frac{2\lambda}{\theta e^{2\lambda}}$$

Substituyendo finalmente θ por η :

$$R > \frac{2\lambda}{\eta e^{2\lambda}}$$

de manera que:

$$\frac{2\lambda}{m_2} > R > \frac{2\lambda}{\eta e^{2\lambda}}$$

de donde:

$$[28] \qquad e^{-u\frac{2\lambda}{m_2}} < \psi(u) < e^{-u\frac{2\lambda}{\eta e^{2\lambda}}}$$

a. Aplicación de la Teoría del Riesgo Colectivo y Utilización de las Tablas de la Función $\phi(u,\lambda,\eta)$.

Recapitulemos primeramente los principales conceptos utilizados en la teoría del riesgo colectivo: El asegurador recibe un flujo continuo de primas de riesgo, más los recargos de seguridad. Los siniestros se distribuyen individual y colectivamente al azar, deduciéndose la importante propiedad de que la prima de riesgo es igual a la probabilidad de que ocurran uno o más siniestros en el intervalo de magnitud infinitesimal

dt. El capital medio se hace unitario, así como el número de las operaciones en cada intervalo dt. El número de los intervalos de magnitud dt es infinito, siendo por lo tanto también infinito el número total de operaciones, que se suceden sin solución de continuidad; esto significa que el asegurador acepta toda operación que se presenta. Se supone conocida la distribución de los capitales a riesgo, que se considera constante. Luego, en la solución particular, se supone que el fondo de seguridad es mayor que el pleno del asegurador.

En cuanto a la aplicación en la práctica, puede utilizarse la fórmula [15] y calcular, para cada distribución particular, la correspondiente probabilidad de la ruina en función del recargo de seguridad y del fondo de seguridad.

Otra solución es la de utilizar la acotación [28]. El límite superior tiene la ventaja de que no está en función de la distribución de los capitales de riesgo, estando determinados el fondo de seguridad y el pleno en unidades de capital medio. En el límite inferior ya interviene el valor:

$$m_2 = \int_0^{\eta} z^2 p(z)\, dz$$

que puede calcularse fácilmente.

En la práctica es suficiente trabajar exclusivamente con el límite superior:

$$\phi(u,\lambda,\eta) \equiv e^{-u \frac{2\lambda}{\eta e^{2\lambda}}}$$

Esta función tiene la ventaja, ya mencionada, de que no exige conocer la distribución de los capitales de riesgo y está expresada en función exclusiva del fondo de seguridad, del recargo de seguridad y del pleno. Además, al tomar la función $\phi(u,\lambda,\eta)$ en vez de la probabilidad de la ruina $\psi(u)$, no se hace sino trabajar con más seguridad. Es por ello que se han tabulado los valores de la función $\phi(u,\lambda,\eta)$ en la convicción de que con la misma pueden resolverse muchos de los problemas que se presentan en la práctica del seguro, en lo que a estabilidad, fondo de seguridad, pleno y recargo de seguridad se refieren.

Hemos de ver, finalmente, algunos problemas que suelen presentarse en la práctica y que pueden resolverse utilizando las tablas de la función $\phi(u,\lambda,\eta)$.

1°) Sea por ejemplo un asegurador que comienza a operar. Suponiendo un capital medio de $ 5.000, se propone trabajar con una seguridad cercana a 0,998 y un fondo de seguridad de $ 250.000 (o sea 50 veces el capital medio). De acuerdo con cálculos actuariales, piensa ganar un 17,5 % sobre los premios de riesgo en la Clase A de seguros y un 30 % en la Clase B de seguros. Se presenta entonces el problema de fijar los plenos. En la tabla encontramos;

$$\phi(50;\ 0,175;\ 2) = 0.00210$$
$$\phi(50;\ 0,30\ ;\ 3) = 0.00217$$

quiere decir que en la Clase A puede trabajar con un pleno de $ 10.000 y en la Clase B con un pleno de $ 15.000.

2°) Supongamos ahora que ese mismo asegurador ha evolucionado, aumentando su fondo de seguridad a $ 450.000. Mientras, el capital medio ha subido a $ 6.000 y se ha comprobado que en la Clase A gana un 20% y en la Clase B un 30%. El problema que se presenta es fijar los plenos correspondientes, para una seguridad cercana a 0,999. En la tabla encontramos;

$$\phi(75;\ 0,20;\ 3) = 0.00123$$
$$\phi(75;\ 0,30;\ 4) = 0.00101$$

pudiendo fijarse, por consiguiente, plenos de $ 18.000 en la Clase A y $ 24.000 en la Clase B.

3°) Continuemos observando al mismo asegurador. Supongamos que, al cabo de un tiempo, ha acumulado una ganancia de $ 150.000, que destina al fondo de seguridad. Podría aumentar pues nuevamente el pleno, pero su política comercial le aconseja reducir las tarifas. Se plantea entonces el problema de determinar los coeficientes de seguridad que debe aplicar con $ 600.000 de fondo de seguridad (100 veces el capital medio) y un pleno de $ 18.000 en la clase A y $ 24.000 en la clase B, si desea trabajar con una seguridad superior a 0,998. La tabla da los siguientes valores:

$$\phi(100;\ 0{,}125;\ 3) = 0.00152$$
$$\phi(100;\ 0{,}200;\ 4) = 0.00127$$

Esto significa que en la clase A tendrá que aplicar un recargo de seguridad del 12,5 % y en la clase B al 20 %.

4°) Supongamos finalmente que el asegurador desea aumentar su actividad. Para ello crea tres Secciones totalmente independientes. La Sección A, que explotará el seguro de la clase A, con un capital medio de $ 5.000; la Sección B, que explotará el seguro de la clase B, con un capital medio de $ 8.000; y la Sección C, que explotará un nuevo seguro, la clase C, con un capital medio de $ 30.000.

En la clase A desea continuar aplicando un recargo del 12,5 % y elevar el pleno a $ 20.000; en la clase B desea continuar aplicando un recargo del 20 % y trabajar con un pleno de $ 64.000; en la clase C desea aplicar un recargo del 35 % y trabajar con un pleno de $ 120.000. El problema consiste en averiguar qué fondo de seguridad tiene que destinar a cada Sección, para que cada una pueda evolucionar, independientemente de las otras, con una seguridad superior a 0,998. Nuestros datos son:

Sección A: $\phi(u;\ 0{,}125;\ 4) < 0.002$

Sección B: $\phi(u;\ 0{,}200;\ 8) < 0.002$

Sección C: $\phi(u;\ 0{,}350;\ 4) < 0.002$

y hay que determinar a u.

En la tabla encontramos:

$$\phi(150;\ 0{,}125;\ 4) = 0.000675$$
$$\phi(200;\ 0{,}200;\ 8) = 0.00123$$
$$\phi(75;\ 0{,}35;\ 4) = 0.00148$$

de manera que los fondos de seguridad tendrían que ser los siguientes;

Sección A: $ 750.000

Sección B: " 1.600.000

Sección C: " 2.250.000

Confiamos que con estos ejemplos se advertirá la utilidad de la función $\phi(u, \lambda, \eta)$ que proponemos, con sus correspondientes tablas.

Tablas de la Función $\phi(u,\lambda,\eta)$

La primera columna indica la cantidad de cifras decimales; la segunda columna registra las tres primeras cifras significativas.

Ejemplos:

$$\phi(25;\ 0,175;\ 4) = 0.214$$

$$\phi(50;\ 0,500;\ 2) = 0.000101$$

K=25

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12.5	15	20
2½	3 552	3 673	3 743	3 788	3 820	3 844	3 862	3 876	3 888	3 909	3 924	3 942
5	3 323	3 470	3 568	3 636	3 686	3 724	3 754	3 778	3 798	3 834	3 860	3 893
7½	3 199	3 341	3 446	3 524	3 584	3 631	3 668	3 699	3 724	3 772	3 806	3 851
10	3 129	3 255	3 359	3 441	3 505	3 557	3 599	3 635	3 664	3 728	3 761	3 815
12½	4 877	3 197	3 296	3 378	3 444	3 499	3 544	3 582	3 615	3 677	3 723	3 784
15	4 622	3 157	3 249	3 329	3 396	3 452	3 499	3 539	3 574	3 641	3 690	3 757
17½	4 458	3 128	3 214	3 291	3 358	3 414	3 463	3 504	3 540	3 611	3 663	3 735
20	4 350	3 107	3 187	3 262	3 327	3 384	3 433	3 475	3 512	3 585	3 640	3 715
25	4 226	4 799	3 150	3 220	3 283	3 339	3 388	3 431	3 469	3 545	3 603	3 684
30	4 163	4 643	3 128	3 193	3 254	3 309	3 357	3 401	3 439	3 518	3 578	3 663
35	4 130	4 552	3 114	3 176	3 235	3 289	3 337	3 381	3 419	3 499	3 560	3 648
40	4 112	4 500	3 106	3 166	3 224	3 277	3 325	3 368	3 407	3 487	3 549	3 638
50	4 101	4 466	3 100	3 159	3 216	3 269	3 317	3 360	3 398	3 479	3 542	3 631

$\phi(u, \lambda, \eta)$ $u = 50$

$100 \cdot \lambda$ \ η	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12.5	15	20
2½	3 305 0.04	3 453	3 552	3 622	3 675	3 712	3 743	3 768	3 788	3 827	3 853	3 888
5	3 104	3 221	3 323	3 405	3 470	3 524	3 568	3 605	3 636	3 696	3 740	3 798
7½	4 397	3 116	3 199	3 275	3 341	3 398	3 446	3 488	3 524	3 597	3 650	3 724
10	4 167	4 653	3 129	3 194	3 255	3 310	3 359	3 403	3 441	3 519	3 579	3 664
12½	5 769	4 390	4 877	3 143	3 197	3 249	3 296	3 339	3 378	3 459	3 523	3 615
15	5 386	4 246	4 622	3 108	3 157	3 204	3 249	3 291	3 329	3 411	3 477	3 574
17½	5 210	4 164	4 458	4 849	3 128	3 172	3 214	3 254	3 291	3 373	3 439	3 540
20	5 123	4 115	4 330	4 685	3 107	3 147	3 187	3 225	3 262	3 342	3 409	3 512
25	6 510	5 638	4 226	4 482	4 799	4 115	3 150	3 185	3 220	3 297	3 364	3 469
30	6 266	5 414	4 163	4 371	4 643	4 952	3 128	3 161	3 193	3 268	3 334	3 439
35	6 168	5 305	4 130	4 309	4 552	4 835	3 114	3 145	3 176	3 249	3 314	3 419
40	6 125	5 250	4 112	4 275	4 500	4 767	3 106	3 136	3 166	3 237	3 302	3 407
50	6 101	5 217	4 101	4 252	4 466	4 722	3 100	3 130	3 159	3 230	3 293	3 399

$u = 75$

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12.5	15	20
2½	3 268	3 305	3 420	3 490	3 552	3 601	3 640	3 673	3 700	3 752	3 788	3 857
5	4 336	3 104	3 183	3 257	3 323	3 379	3 428	3 470	3 507	3 581	3 636	3 712
7½	5 790	4 397	4 889	3 144	3 199	3 251	3 298	3 341	3 380	3 461	3 524	3 616
10	5 225	4 167	4 464	4 858	3 129	3 173	3 219	3 255	3 293	3 374	3 441	3 541
12½	6 675	5 769	4 260	4 539	4 877	3 124	3 161	3 197	3 232	3 311	3 378	3 482
15	6 240	5 386	4 155	4 357	4 622	4 924	3 124	3 157	3 188	3 264	3 329	3 435
17½	7 962	5 210	5 981	4 247	4 458	4 712	4 990	3 128	3 157	3 228	3 291	3 397
20	7 430	5 123	5 656	4 179	4 350	4 565	4 810	3 107	3 134	3 200	3 261	3 366
25	7 115	6 510	5 359	4 106	4 226	4 388	4 582	4 799	3 103	3 162	3 220	3 321
30	8 434	6 266	5 208	5 716	4 163	4 294	4 456	4 643	4 846	3 139	3 193	3 291
35	8 218	6 168	5 148	5 544	4 130	4 241	4 384	4 552	4 738	3 124	3 176	3 272
40	8 140	6 125	5 118	5 455	4 112	4 213	4 344	4 500	4 675	3 116	3 166	3 260
50	8 102	6 101	5 101	5 401	4 101	4 194	4 318	4 466	4 633	3 110	3 159	3 252

u = 100

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12.5	15	20
2½	4 927 4,555	3 205	3 305	3 386	3 453	3 507	3 552	3 590	3 622	3 684	3 728	3 788
5	4 108 4.766	4 490	3 104	3 164	3 221	3 275	3 323	3 366	3 405	3 485	3 547	3 656
7½	5 157	4 135 2.22	4 397	4 756	3 116	3 158	3 199	3 238	3 275	3 356	3 425	3 524
10	6 278	5 426	4 167	4 378	4 653	4 964	3 129	3 162	3 194	3 270	3 336	3 441
12½	7 592	5 152	5 769 3,33	4 204	4 390	4 619	4 877	3 115	3 145	3 211	3 273	3 378
15	7 149	6 606	5 386	4 117	4 246	4 418	4 622	4 846	3 108	3 169	3 227	3 329
17½	8 441	6 269	5 210	5 721	4 164	4 295	4 458	4 645	4 849	3 159	3 193	3 291
20	8 151	6 131	5 125	5 469 5.55	4 115	4 217	4 350	4 508	4 685	3 117	3 167	3 262
25	9 260	7 407	6 510	5 232	5 630 6,66	4 131	4 226	4 344	4 482	4 884	3 132	3 220
30	10 707	7 171	6 266	5 138	5 414	5 906	4 163	4 258	4 371	4 718	3 111	3 193
35	10 283	8 929	6 168	6 957	5 305	5 697	4 150	4 210	4 309	4 620	4 985	3 176
40	10 156	8 626	6 125	6 755	5 250	5 589	4 112	4 184	4 275	4 564	4 910	3 166
50	10 103	8 472	6 101	6 637	5 217	5 522	4 101	4 168	4 255	4 527	4 861	3 159

u = 125

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12.5	15	20
2½	4 512	3 138	3 226	3 305	3 371	3 428	3 476	3 517	3 552	3 622	3 673	3 743
5	5 350	4 230	4 392	3 104	3 152	3 199	3 243	3 285	3 323	3 405	3 470	3 568
7½	6 313	5 461	4 177	4 397	4 679	4 997	3 133	3 166	3 199	3 275	3 341	3 446
10	7 359	5 109	5 599	4 167	4 330	4 537	4 774	3 103	3 129	3 194	3 255	3 359
12½	8 519	6 300	5 228	5 769	4 173	4 309	4 477	4 669	4 877	3 143	3 197	3 296
15	9 928	7 951	6 963	5 386	5 975	4 189	4 310	4 457	4 622	3 108	3 157	3 249
17½	9 202	7 344	6 449	5 210	5 587	4 122	4 212	4 325	4 458	4 849	3 128	3 214
20	10 527	7 141	6 230	5 123	5 375	5 833	4 152	4 241	4 350	4 685	3 107	3 187
25	11 587	8 325	7 766	6 510	5 180	5 445	5 875	4 148	4 226	4 482	4 799	3 150
30	11 115	9 110	7 340	6 266	5 105	5 279	5 585	4 103	4 163	4 371	4 643	3 128
35	12 367	10 513	7 192	6 168	6 716	5 201	5 458	5 800	4 130	4 309	4 552	3 114
40	12 175	10 313	7 132	6 125	6 559	5 163	5 364	5 679	4 112	4 275	4 500	3 106
50	12 104	10 220	7 102	6 101	6 469	5 140	5 319	5 604	4 101	4 253	4 466	3 100

u = 450

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12.5	15	20
2½	4 282	4 927	3 168	3 240	3 305	3 361	3 410	3 453	3 490	3 565	3 622	3 700
5	5 113	4 108	4 336	4 662	3 104	3 144	3 183	3 221	3 257	3 338	3 405	3 507
7½	7 623	5 157	5 790	4 208	4 397	4 629	4 889	3 116	3 144	3 212	3 275	3 380
10	8 464	6 278	5 215	5 735	4 167	4 299	4 464	4 653	4 858	3 140	3 194	3 233
12½	9 455	7 592	6 675	5 291	5 769	4 154	4 260	4 390	4 539	4 967	3 143	3 232
15	10 577	7 149	6 240	5 127	5 386	5 854	4 155	4 246	4 357	4 695	3 108	3 189
17½	11 926	8 441	7 962	6 612	5 210	5 507	5 981	4 164	4 247	4 518	4 849	3 157
20	11 185	8 151	7 430	6 321	5 123	5 320	5 656	4 115	4 179	4 401	4 685	3 134
25	12 132	9 260	7 115	6 118	6 510	5 151	5 339	5 658	4 106	4 263	4 482	3 103
30	13 188	10 7•7	8 434	7 513	6 266	6 862	5 208	5 414	5 716	4 192	4 371	4 846
35	14 476	10 285	8 218	7 296	6 168	6 582	5 148	5 305	5 544	4 154	4 309	4 738
40	14 196	10 156	8 140	7 207	6 125	6 452	5 118	5 250	5 455	4 134	4 275	4 675
50	14 104	10 103	8 102	7 161	6 101	6 377	5 101	5 217	5 401	4 121	4 253	4 635

u = 200

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12.5	15	20
2½	5 860	4 420 2,2	4 927	3 149	3 205	3 257	3 305	3 348	3 386	3 467	3 530	3 622
5	6 118	5 240	4 106	4 268	4 490	4 734	3 104	3 154	3 164	3 235	3 299	3 405
7½	8 247	6 183	5 157	5 572	4 135	4 250	4 397	4 568	4 736	3 127	3 179	3 275
10	10 774	7 182	6 278	5 143	5 426	5 929	4 167	4 863	4 378	4 728	3 113	3 194
12½	11 350	8 231	7 392	6 415	5 152	5 384	5 769	4 132	4 204	4 444	4 746	3 143
15	12 223	9 368	7 149	6 138	6 606	5 175	5 386	5 716	4 117	4 286	4 516	3 108
17½	13 194	10 723	8 441	7 519	6 269	6 870	5 210	5 417 2.88	5 721	4 193	4 373	4 849
20	14 227	10 173	8 151	7 220	6 131	6 471	5 123	5 258	5 469	4 137	4 280	4 685
25	16 675	11 166	9 260	8 339	7 407	6 173	6 520	5 118	5 232	5 701	4 175	4 482
30	17 500	12 293	10 707	8 190	7 171	7 820	6 266	6 664	5 138	5 515	4 124	4 372
35	18 801	13 862	10 283	9 915	8 929	7 486	6 168	6 442	6 937	5 384	5 971	4 309
40	18 245	13 391	10 156	9 569	8 626	7 346	6 185	6 359	6 755	5 318	5 829	4 275
50	18 106	13 225	10 103	9 406	8 473	7 272	6 101	6 282	6 638	5 278	5 741	4 255

u = 250

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12.5	15	20
2½	5 262	4 190	4 512	4 927	3 138	3 183	3 226	3 267	3 305	3 386	3 453	3 552
5	7 122	6 531	5 350	4 108	4 230	4 395	4 592	4 810	3 104	3 164	3 221	3 323
7½	10 980	7 213	6 313	5 157	5 461	5 994	4 177	4 277	4 397	4 756	3 116	3 199
10	11 129	8 119	7 359	6 278	5 109	5 289	5 599	4 106	4 167	4 378	4 653	3 129
12½	13 269	10 899	8 519	7 592	6 300	6 955	5 228	5 448	5 769	4 204	4 390	4 877
15	15 861	11 905	9 928	7 149	7 951	6 557	6 965	5 208	5 386	4 117	4 246	4 622
17½	16 408	11 119	9 202	8 441	7 344	6 149	6 449	5 106	5 210	5 721	4 164	4 458
20	17 278	12 198	10 527	8 151	7 141	7 694	6 230	6 983	5 123	5 469	4 115	4 350
25	19 344	13 106	11 587	9 260	8 325	7 198	7 766	6 220	6 310	5 232	5 638	4 226
30	20 133	16 121	11 115	10 707	8 110	8 781	7 339	6 107	6 266	5 138	5 414	4 163
35	21 135	17 263	12 367	10 283	9 513	8 806	7 192	7 641	6 168	6 957	5 305	4 130
40	22 306	18 975	12 175	10 156	9 313	8 266	7 132	7 461	6 125	6 755	5 250	4 112
50	22 107	18 485	12 103	10 103	9 220	8 197	7 102	7 365	6 101	6 638	5 227	4 101

u = 300

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12.5	15	20
2½	6 797	5 860	4 282	4 576	4 927	3 130	3 168	3 205	3 240	3 319	3 386	3 490
5	8 127	6 118	5 115	5 439	4 108	4 207	4 336	4 490	4 662	3 114	3 164	3 257
7½	11 389	8 247	6 623	6 432	5 157	5 395	5 790	4 135	4 208	4 451	4 756	3 144
10	13 215	10 774	8 464	7 541	6 278	6 896	5 215	5 426	5 735	4 196	4 378	4 898
12½	15 207	11 350	9 455	8 844	7 592	6 238	6 675	5 152	5 291	5 935	4 204	4 539
15	17 333	12 223	10 577	8 162	7 149	7 730	6 240	6 606	5 127	5 483	4 117	4 357
17½	19 857	13 194	10 926	9 374	8 441	7 257	7 962	6 269	6 612	5 269	5 721	4 247
20	20 341	14 227	11 185	9 103	8 151	7 102	7 430	6 131	6 321	5 160	5 469	4 179
25	22 175	16 675	12 132	10 125	9 260	8 227	7 115	7 407	6 112	6 690	5 232	4 106
30	24 354	19 500	13 188	11 263	10 707	9 743	8 433	7 171	7 313	6 370	5 138	5 716
35	25 227	20 801	14 476	12 875	10 285	9 339	8 218	8 929	7 296	6 238	6 957	5 544
40	26 383	20 245	14 196	12 430	10 156	9 204	8 140	8 626	7 207	6 179	6 755	5 455
50	26 109	20 105	14 104	12 259	10 103	9 142	8 102	8 473	7 161	6 246	6 638	5 401

u = 400

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12.5	15	20
2½	7 759	5 176	5 860	4 223	4 420	4 660	4 927	3 121	3 149	3 218	3 281	3 386
5	10 138	8 576	6 118	6 718	5 240	5 568	4 108	4 179	4 268	4 553	4 896	3 164
7½	14 611	10 334	8 247	7 327	6 183	6 625	5 157	5 322	5 572	4 161	4 320	4 756
10	17 599	12 330	10 774	8 205	7 182	7 864	6 278	6 691	5 143	5 530	4 127	4 378
12½	19 123	14 532	11 350	9 172	8 231	7 147	7 392	6 175	6 415	5 197	5 556	4 204
15	22 497	15 135	12 223	10 190	9 368	8 305	7 149	7 513	6 138	6 815	5 267	4 117
17½	24 378	17 522	13 194	11 270	10 723	9 757	8 441	7 174	7 519	6 373	5 139	5 721
20	26 514	18 298	14 227	12 485	10 175	9 222	8 151	8 668	7 220	6 188	6 785	5 469
25	29 456	20 275	16 675	13 291	11 166	10 298	9 260	8 140	8 539	7 610	6 307	5 232
30	31 250	22 856	17 500	14 363	12 293	11 673	10 707	9 441	8 190	7 265	6 154	5 138
35	33 641	23 744	18 801	15 857	13 862	11 236	10 283	9 195	9 915	7 148	7 942	6 957
40	34 599	23 153	18 245	15 324	13 391	11 120	10 156	9 115	9 569	7 101	7 687	6 755
50	34 112	24 498	18 105	15 165	13 223	12 742	10 103	10 793	9 407	8 772	7 549	6 638

Bibliografia

Abreviaturas utilizadas en esta Bibliografía y en el Texto.

A.J.	Assekuranzjahrbuch - Viena
A.M.S.	Annals of Mathematical Statistics - Baltimore
A.M.W.S.	Archiv für mathematische Wirtschafts und Sozialforschung
A.S.I.	Actualités Scientifiques et Industrielles - Paris
B.f.V.M.	Blätter für Versicherungsmathematik - Berlin
C.I.A.	Congreso Internacional de Actuarios
E.S.M.	Encyclopédie des Sciences Mathématiques - Paris 1907
G.I.I.A.	Giornale dell'Istituto Italiano degli Attuari - Roma
J.A.F.	Journal des Actuaires Français - Paris
M.R.V.	Masius' Rundschau der Versicherung - Leipzig
M.V.S.V.	Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker - Berna
N.Z.F.V.	Neumann's Zeitschrift für Versicherungswesen - Berlin
R.A.I.A.	The Record, American Institute of Actuaries - Chicago
S.A.	Skandinavisk Aktuarietidskrift - Uppsala
T.A.S.A.	Transactions, Actuarial Society of America - New York
Z.G.V.W.	Zeitschrift für die gesamte Versicherungswissenschaft - Berlin

J. ALTENBURGER, Das Problem des mathematischen Risikos; die Sicherheitsreserven bei Versicherungsanstalten.
C.I.A. 1909, Tomo I, págs. 957/991.

H. AMMETER, Das Zufallsrisiko bei kleinen Versicherungsbeständen.
M.V.S.V. 1942, págs. 155/182.

id., Untersuchungen über die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen in einem Versicherungsbestand.
M.V.S.V. 1945, págs. 727/760.

id., Das Maximum des Selbstbehaltes in der Lebensversicherung unter Berücksichtigung der Rückversicherungskosten.
M.V.S.V. 1946, págs. 187/213.

id., A Generalization of the Collective Theory of Risk in regard to fluctuating Basic-probabilities.
S.A. 1948, págs. 171/198.

J.BAPTIST Le Calcul des Probabilités dans le domaine de l'Assurance.
C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 159/169.

A.BERGER Die Prinzipien der Versicherungstechnik.
Berlin 1925.

id., Äquivalenz und Risiko.
A.M.V.S. 1938, Tomo I pág. 1.

id., Mathematik der Lebensversicherung.
Berlin 1939.

id., Welche Hypothesen liegen der Versicherungsmathematik zugrunde und wie kann die Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Risikotheorie im Versicherungswesen begründet werden?
C.I.A. 1940, Tomo IV, págs. 9/26.

J.BERNOULLI, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi).
Trad. alemana por R.Haussner.
Leipzig 1899.

J.BERTRAND Calcul des Probabilités.
Paris 1907.

C.BOEHM, Versuch einer systematischen Darstellung der modernen Risikotheorie.
B.F.V.M. 1933, págs. 197/213.

G. BOHLMANN, Lebensversicherungsmathematik.
Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Tomo I, Parte II, Leipzig 1900-1904.

id., Technique de l'assurance sur la vie (exposé par H. POTERIN DU MOTEL).
E.S.M., Tomo I, Vol.4, Fasc.2, Paris 1908, págs. 491/590.

id., Die Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf die Lebensversicherung.
C.I.A. 1908, vol. III, pág. 244 y sig.

id., Die Theorie des mittleren Risikos in der Lebensversicherung.
C.I.A. 1909, Tomo I, págs. 593/603.

E. BOREL, Principes et formules classiques.
Paris 1930.

P. BOSCHAN, Some considerations concerning probability in actuarial science and the foundation of the extended Life Table.
C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 159/169.

G. BREMIKER, Das Risiko bei Lebensversicherungen.
Berlin 1859.

U. BROGGI, Matematica Attuariale, Milan 1906.

H. CRAMER, On the mathematical theory of risk.
Skandia-Festskrift, Stockholm 1930.

id., Random Variables and Probability Distributions.
London 1937.

id., Sur un nouveaux théoreme-limite de la théorie des probabilités.
A.S.I. 1938, pág. 736 y sig.

id., Problems in Probability Theory.
A.M.S. 1947, págs. 165/193.

E. CZUBER, Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Leipzig 1903.

id., Calcul des Probabilités (exposé par J. LE ROUX).
E.S.M., Tomo I, Vol. 4, Fasc.2, Paris 1908, págs. 1/46.

id., Die phylosophischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung.
Leipzig 1923.

F.DUBOIS, Contribution a l'étude de la Réassurance. C.I.A. 1937, Tomo I, pág. 397/412.

F.EGGENBERGER, Die Wahrscheinlichkeitsansteckung. Ein Beitrag zur theoretischen Statistik. M.V.S.V. 1924, págs. 31/143.

M.MAHLER, Das Problem des mathematischen Risikos; die Sicherheitsreserven bei Versicherungsanstalten und Pensionsfonden. C.I.A. 1909, Tomo I, pág. 85[illegible]/875.

W.P.ELDERTON, Some notes on the effect of deviations from the mean amount of claims on the reserves of a Life office. C.I.A. 1909, Tomo I, pág. 715/721.

F.ESSCHER, On the probability function in the collective theory of risk. S.A. 1932, pág. 175/195.

B.de FINETTI, La teoria del rischio e il problema della rovina dei giocatori. G.I.I.A., año X, nº 2, 1939.

id., Il problema dei pieni. G.I.I.A., año XI, nº 1, 1940.

id., Il Calcolo delle Probabilita nel dominio dell'Assicurazione. C.I.A. 1940, Tomo I, pág. 253/261.

H.GALBRUN, Assurances sur la Vie; Calcul des Primes. Paris 1924.

K.GOHING, Eine Erweiterung der Mises'schen Kollektive und der entsprechende Ausbau der Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung. C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 329/348.

J.P.GRAM, Uber die Sicherheitsreserven der Lebensversicherung. C.I.A. 1909, Tomo I, págs. 579/592.

G.GAGNER, Zur Theorie des Risikos. C.I.A. 1930, pág. 2[illegible] y sig.

A.GULDBERG, Zur Theorie des Risikos. C.I.A. 1909, Tomo I, págs. 757/764.

E.GUNTHER, Das Risiko des Zufalles im Versicherungsbetrieb. Z.G.V.W. 1929, págs. 209/2[illegible] y 292/[illegible].

id., Die Kalkulation der Versicherungsbetriebe. Berlin 1936.

E.HAFKAL	Die Bestimmung der Selbstbehalte in der Lebensversicherung. C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 349/376.
id.,	Betrachtungen über die Schwankungen der Sterblichkeit in der Lebensversicherung. M.V.S.V. 1945, págs. 361/373.
K.O.HAGSTROEM	Quelques réflexions sur le role de la théorie des probabilités dans l'assurance pratique. C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 321/328.
id.,	Note sur l'incertitude du risque. S.A. 1942, págs. 150/168.
PH.M.HANSON and A.D.CLARKE	Some effects upon insurance problems of modern criticisms of the frequency theory of probability. C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 207/224.
K.HATTENDORF	Uber die Berechnung der Reserven und des Risikos bei der Lebensversicherung. M.Z.V., Leipzig 1868.
I.HESSELBERG	La Réassurance des excédents de sinistres en assurances sur la vie. C.I.A. 1937, Tomo I, págs. 416/432.
K.HULTMAN	Einige numerische Untersuchungen auf Grund der kollektiven Risikotheorie. S.A. 1942, págs. 84/119 y 189/193.
M.JACOB	Su di un metodo d'approssimazione per il calcolo del rischio quadratico medio. C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 285/307.
H.JECKLIN	Die Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen. C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 71/82.
id.,	Ist die Anwendbarkeit der Wahrscheinlichkeitstheorie in der Lebensversicherung besser fundiert als in der Sachversicherung? C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 377/393.
id.,	Die Wahrscheinlichkeitstheorie im Versicherungswesen. M.V.S.V. 1941, págs. 39/66.
A.KHINTCHINE	Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. New York 1948.
S.KOLODZIEJCZYK	Sur les événements a probabilité élevée. C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 309/319.

I. LAH — Wahrscheinlichkeitsrechnung und Versicherungswesen.
C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 431/434.

C. LANDRE — Mathematisch technische Kapitel zur Lebensversicherung.
Jena 1901.

H. LAURENT — Traité du calcul des probabilités.
Paris 1873.

id., — Théorie et pratique des assurances sur la vie.
Paris 1896.

I. LAURIN — An introduction into Lundberg's theory of risk.
S.A. 1930, págs. 84/111.

J. LOISEL — Essai de Tarification Rationelle de la Réassurance en excédent du risque de non-payement des Loyers.
C.I.A. 1937, págs. 461/468.

E. LUKACS — Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Theorie des mittleren Risikos.
C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 171/215.

F. LUNDBERG — Uber die Theorie der Rückversicherung.
C.I.A. 1909, Tomo I, págs. 877/955.

id., — Försäkringsteknisk riskutjämning.
Stockholm 1926.

id., — Uber die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Risikenmasse.
S.A. 1930, págs. 1/83.

id., — Some Supplementary Researches on the collective risk theory.
S.A. 1932, págs. 137/158.

id., — On the numerical application of the collective risk theory.
Den Förenade-Festskrift, Stockholm 1934, págs. 221/283.

D.P. MEDOLAGHI — La teoria del rischio e le sue applicazioni.
C.I.A. 1909, Tomo I, págs. 727/751.

B. MEIDELL — Zur Theorie des Maximums.
C.I.A. 1912, Tomo I, págs. 85/95.

id., — Zur Theorie und Praxis des Maximums in der Lebensversicherung.
C.I.A. 1937, Tomo I, págs. 469/476.

W.O.MENGE — A Statistical Treatment of Actuarial Functions.
R.A.I.A. 1936, págs. 65 y sigs.

R.v.MISES — Wahrscheinlichkeitsrechnung.
New York 1945.

J.NEUHAUS — Über die Berechnung der Selbstbehalte bei Lebensversicherungen.
B.Z.V.V. 1936.

H.HINDERMANN — Untersuchungen über den Wahrscheinlichkeitscharakter der Sterblichkeit.
M.V.S.V. 1946, págs. 131/168.

P.NOLFI — Die jährlichen Sterblichkeitsschwankungen und ihre wahrscheinlichkeitstheoretische Erfassung.
C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 395/408.

E.COHEN — Het maximum van verzekerd bedrag.
Utrecht 1896.

G.OTTAVIANI — La teoria del rischio del Lundberg e il suo legame con la teoria classica del rischio.
C.I.I.A. 1940, págs. 163/189.

W.G.J.ten PAS — Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik in der Versicherungsmathematik.
C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 263/283.

J.H.PEEK — Toepassing der Waarschijnlijkheids-Rekening op Levensverzekering en Sterfte-statistiek.
Utrecht 1898.

id., — Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung.
Strassburg 1899.

K.B.PIPER — Contingency Reserves for Life Annuities.
T.A.S.A. 1933, págs. 247 y sigs.

H.POINCARÉ — Calcul des Probabilités.
Paris 1912.

F.M.REDINGTON and H.L.RICHARDSON — An aspect of the "a priori" probability theory of mortality.
C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 225/239.

F.J.RICHARD et E.PETIT — Théorie Mathématique des Assurances, Tome I.
Paris 1922.

P.RIEBESELL — Die mathematischen Grundlagen der Sachversicherung.
C.I.A. 1940, Tomo IV, págs. 27/36.

L. RIEDEL — Considerazioni sulle Diverse Forme del Contratto di Riassicurazione Vita. C.I.A. 1937, págs. 489/499.

H.L. RIETZ — On the Mathematical Theory of Risk and Landré's Theory of the Maximum. R.A.I.A. 1912, Tomo 13.

id., — On the Risk Problem from a Mathematical Point of View. C.I.A. 1930, págs. 294 y sigs.

J.P. ROBERT — La détermination des excédents a reassurer dans l'assurance sur la vie. M.V.S.V. 1946, págs. 245/271.

A. ROTHANGE — Das technische Zufallsrisiko. C.I.A. 1909, Tomo I, págs. 685/714.

id., — Zur praktischen Auswertung des technischen Zufallrisikos und zur Bewertung der Zufallschwankung in der Praxis privater Versicherungsanstalten. M.V.S.V. 1911, págs. 7/69.

T. SAXEN — On the probability of ruin in the collective risk theory for insurance enterprises with only negative risk sums. S.A. 1948, págs. 199/228.

C.O. SEGERDAHL — On homogeneous random processes and collective risk theory. Uppsala 1939.

id., — Uber einige risikotheoretische Fragestellungen. S.A. 1942, págs. 43/83.

id., — Some Properties of the Ruin Function in the Collective Theory of Risk. S.A. 1948, págs. 46/87.

S. SMAVICH — Some assumptions and Hypotheses underlying actuarial Calculations. C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 177/156.

P. SMOLENSKY — Das mathematische Risiko aus der Verteilung der Versicherungssummen auf die Sterbefälle. C.I.A. 1909, Tomo I, págs. 765/780.

id., — Sulla teoria del rischio. C.I.A. 1930, vol. II, págs. 360/366.

J.F. STEFFENSEN — On Hattendorfs Theorem in the Theory of Risk. S.A. 1929, págs. 1 y sigs.

S. TÄCKLIND — Sur le risque de ruine dans des jeux inéquitables.
S.A. 1942, págs. 1/42.

A. TAUBER — Über Risiko und Sicherheitszuschlag.
C.I.A. 1909, Tomo I, págs. 781/842.

J.N. TETENS — Einleitung zur Berechnung der Leibrenten.
Leipzig 1876.

G. TOLENTINO — La Riassicurazione nel Ramo Vita.
C.I.A. 1937, págs. 535/548.

F.L. TUMA — Risiko und Prämie in der Versicherung.
Z.G.V.W., Tomo 36, págs. 245 y sigs.

J.V. USPENSKY — Introduction to Mathematical Probability.
New York 1937.

S. VAJDA — Wahrscheinlichkeitstheoretische Grundlegung der Versicherungsmathematik.
A.J. 1933, Tomo 32.

id., — Die erweiterte Sterbetafel und ihre wahrscheinlichkeitstheoretische Verwendung.
C.I.A. 1940, Tomo I, págs. 241/251.

L. WAGNER — Das Problem vom Risiko in der Lebensversicherung.
Jena 1898.

H. WIESLER — Über die Grundlagen der Lebensversicherungsmathematik.
M.V.S.V. 1944, págs. 151/209.

T. WITTSTEIN — Mathematische Statistik und deren Anwendung.
Hannover 1867.

id., — Das mathematische Risiko der Versicherungs-Gesellschaften.
Hannover 1885.

H.O.A. WOLD — A Technical Study on Reinsurance.
C.I.A. 1937, págs. 549/559.

E. ZALAI — Zur Theorie des Risikozuschlages.
C.I.A. 1909, Tomo I, págs. 847/853.

Indice

INDICE

Página